LİSE BİRİNCİ SINIFLAR İÇİN DERS KİTABI

MATEMATİK I

Dr. Kostadin Trençevski
Dr. Biljana Krsteska
Dr. Gjorgji Markoski
Mr. Jasmina Markoska

lamina

MATEMATİK I, lise birinci sınıflar ders kitabı
Telif hakları © 2025 Ars Lamina

Yayınevi
Ars Lamina – yayıncılık, Üsküp 2025

Genel Yayın Yönetmeni
Branka Bugariska

Editör
Biljana Stojoska Zlatkov

Yazarlar
Dr. Kostadin Trençevski
Dr. Biljana Krsteska
Dr. Gjorgji Markoski
Mr. Jasmina Markoska

Makedoncadan çeviri
(„Математика I, учебник за прва година гимназиско образование“, Арс Ламина 2025)
Selsebil Karaağaç

Dil redaksiyonu
Önder Özgürlü

Tasarım
Pointer Creative Agency

Grafik ve teknik düzenleme
Ars Lamina – yayıncılık

Baskı
Branko Gapo – grafik üretim, Üsküp 2025

Tiraj
220

Tüm hakları saklıdır. Bu kitabın hiçbir bölümü, yayınevinin yazılı izni olmadan herhangi bir şekilde veya herhangi bir yolla, elektronik ya da mekanik, fotokopi, kayıt veya arşivleme sistemi dâhil olmak üzere, çoğaltılamaz veya aktarılamaz.

Bu ders kitabı, Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı'nın 27.08.2025 tarihli ve 26-945/1 sayılı "Lise birinci sınıf Matematik dersi için ders kitabının onayı ve kullanımı" kararı ile ortaöğretim liselerinde kullanım için onaylanmıştır.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје
373.5:51(075.3)=512.161
MATEMATİK I : lise birinci sınıf ders kitabı / Kostadin Trençevski ...
[и др.] ; [makedoncadan çeviri Selsebil Karaağaç. - Üsküp : Ars Lamina-yayincilik, 2025. - 370 стр. : илустр. ; 26 см

Превод на делото: Математика I, учебник за прва година гимназиско образование. - Други автори: Biljana Krsteska, Gjorgji Markoski, Jasmina Markoska. - Kullanilan kaynaklar стр. [370]

ISBN 978-608-280-186-5

1. Trençevski, Kostadin [автор] 2. Krsteska, Biljana [автор] 3.
Markoski, Gjorgji [автор] 4. Markoska, Jasmina [автор]

COBISS.MK-ID 67025157

ÖNSÖZ

Matematik ders kitabı, lise birinci sınıf için yeni öğretim programına göre hazırlanmıştır. Öğrencilere konuları daha yakınlaştırmak amacıyla, yeni içeriklerin sunumu ağırlıklı olarak örnekler üzerinden yapılmış, bu sayede eski bilgiler yeni konularla ilişkilendirilmiştir. Her ders, önceki bilgilerin tekrarı ile başlamakta, ardından yeni içeriklere giriş ve motivasyon sunmaktadır.

Ders kitabı altı konudan oluşmaktadır.

Birinci konu **"Sayılar ve sayılarla işlemler"** olup, kümeler ve kümelerle işlemler ile Kartezyen çarpım konularındaki bilgilerini tekrar edip derinleştireceksin. Daha sonra, doğal sayılardan reel sayılara kadar olan bilgilerini bir bütün halinde tamamlayacaksın. Son bölümde ise orantılar içinde faiz (basit ve bileşik) ve devlet bütçesine vatandaşların ve şirketlerin ödedikleri vergilerle tanışacaksın.

İkinci konu **"Cebirsel rasyonel ifadeler"** olup, üsler ve kökler, tam ve kesirli-rasyonel cebirsel ifadeler konularındaki bilgilerini derinleştireceksin. Kökler ve polinomlarla işlemler rutin düzeyde kavranmalıdır.

Üçüncü konu **"Fonksiyon, denklem, iki denklemin oluşturduğu sistem ve eşitsizlik"** yine cebire aittir. Burada üstel ve kuvvet fonksiyonlarını, grafiklerini, iki lineer denklem sistemlerini çözme yöntemlerini ve eşitsizliklerin çözümünü öğreneceksin.

Dördüncü konu **"Geometri"** düzlem geometrisi (planar geometri) ile ilgilidir. Burada vektörler ve 2D şekiller ele alınır. Ayrıca ilk kez dar açılı trigonometrik fonksiyonlarla tanışacaksın. Bunlar mühendislik uygulamalarında temel bir araçtır. Bu alandaki bilgiler, lise matematik öğreniminin ilerisi için anahtar niteliğindedir.

Beşinci konu **"Ölçme"** de geometriye adanmıştır, fakat 2D şekillerin yanı sıra 3D şekiller de incelenmektedir. Bu konu esas olarak bazı 2D ve 3D şekillerin alan ve hacim hesaplamaları ile ilgilidir.

Altıncı konu **"Verilerle çalışma"** ise olasılık kavramlarını işler. Ayrıca veri toplama, işleme ve çeşitli türlerde grafiklerle sunma konularını da kapsar.
Dersleri daha kolay takip edebilmek için farklı alanlar kullanılmaktadır.



Bu alanda dersteki en önemli unsurlar tanımlanmaktadır.



Bu alanda dersteki özellikler veya önermeler vurgulanmaktadır.

ÖRNEK 1

Burada çözülmüş örnekler verilmiştir ve bunlar çoğunlukla günlük hayattan seçilmiştir.

Örneklerden sonra genellikle edinilen bilgiyi uygulaman gereken bir alıştırma yer almaktadır.

Her dersin sonunda, öğrencinin bilgisini kontrol etmesine imkân sağlayacak sorular verilmiştir. Ayrıca her konunun sonunda, tüm konuyu kapsayan tekrar soruları bulunmaktadır.

Her dersin alıştırmalarından sonra, öğrencilerden öğrendiklerini uygulamaları istenen bir araştırma bölümü vardır.

Gösterilen çabalara rağmen bazı teknik hatalar mümkün olabilir, bunlar sonraki baskıda elbette giderilecektir. Ders kitabının geliştirilmesi yönünde yapılacak her iyi niyetli eleştiriye şimdiden teşekkür ederiz. Özellikle, bu kitabın matematiği daha çok sevmenize ve onu en sevdiğiniz ders haline getirmesine katkı sağlamasından mutluluk duyacağız.

İÇİNDEKİLER

KONU 1: SAYILAR VE SAYILARLA İŞLEMLER

1.1. Küme. Alt Küme ... 8
1.2. Denk Kümeler ve Kardinal Sayılar ... 12
1.3. Kümelerle İşlemler ... 16
1.4. Kümelerin Uygulanmasıyla Problem Çözme ... 23
1.5. Kümelerin Kartezyen Çarpımı ... 28
1.6. Doğal Sayılar ... 34
1.7. Tam Sayılar ve Tam Sayılarla İşlemler ... 44
1.8. Rasyonel Sayılar ve Rasyonel Sayılarla İşlemler ... 49
1.9. Gerçek Sayılar ve Gerçek Doğru Üzerindeki Aralıklar ... 59
1.10. Oranlar ve Orantılar ... 65
1.11. Yüzde Hesabı ... 74
1.12. Basit ve Bileşik Üçlü Kural ... 82
1.13. Paylaştırma Hesabı ... 86
1.14. Karışım Hesabı ... 89
1.15. Faiz Hesabı ... 92
TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN SORULAR ... 97

KONU 2: CEBİRSEL RASYONEL İFADELER

2.1. Üs ve Doğal Sayı Kuvvetli Bir Üssün Değeri ... 102
2.2. Kare ve Küp Kök ... 106
2.3. Doğal Sayı Üs Göstergeli Üslerle İşlemler ... 109
2.4. Üs Göstergeci Tam Sayı Ve Rasyonel Sayı Olan Üslü Ifade ... 115
2.5. Sayıların Üstel Biçimde Gösterilmesi ... 120
2.6. Cebirsel Rasyonel Ifadeler ... 124
2.7. Toplama ve Çıkarma İşlemleriyle tam Rasyonel Ifadeler ... 129
2.8. Tam Rasyonel Ifadelerin Çarpılması ... 133
2.9. Kısaltılmış Çarpma Formülleri ... 136
2.10. Tam Sayılı Rasyonel İfadelerin Bölünmesi ... 142
2.11. Polinomların Çarpanlara Ayrılma Yöntemleri ... 146
2.12. Tam Rasyonel İfadelerin En Büyük Ortak Böleni (EBOB) ve En Küçük Ortak Katı (EKOK) ... 151
2.13. Cebirsel Kesir. Cebirsel Kesri Genişletme ve Sadeleştirme ... 154
2.14. Cebirsel Kesirlerle İşlemler ... 159
TEKRAR VE PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI ... 164

KONU 3: FONKSİYON, DENKLEM, İKİ DENKLEMDEN OLUŞAN SİSTEM VE EŞİTSİZLİK

3.1. Noktanın Koordinatları ve Kartezyen Dik Koordinat Sisteminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık ... 167
3.2. Doğru Parçasının Orta Noktası ve Üçgenin Alanı ... 171
3.3. Doğrusal Fonksiyon ... 176
3.4. Kuvvet Fonksiyonları ... 184
3.5. Üstel Fonksiyon ... 192
3.6. Tek Bilinmeyenli Denklemler ve Eşdeğer Denklemler ... 199

3.7. Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlerin Ve Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlere Indirgenen Denklemlerin Çözümü 203
3.8. Tek Bilinmeyenli Lineer Denklemlerin Oluşturulması ve Çözülmesi 208
3.9. Iki Bilinmeyenli Iki Lineer Denklem Sistemi 212
3.10. İki bilinmeyenli İki Lineer Denklem Sistemini Çözme Yöntemleri 217
3.11. İki bilinmeyenli İki Lineer Denklem Sisteminin Problem Durumlarında Uygulanması 223
3.12. Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Türleri ve Eşdeğer Eşitsizlikler 226
3.13. Bir Bilinmeyenli Lineer Eşitsizliklerin Kurulması ve Çözümü 230
TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR 235

KONU 4: GEOMETRİ
4.1. Vektör. Vektörün Doğrultusu, Yönü Ve Büyüklüğü 239
4.2. Eş Ve Zıt Vektörler. Kolinear Vektörler 241
4.3. Vektörlerle Işlemler 243
4.4. Vektörün Koordinatları 248
4.5. Vektörlerin Uygulamaları (Kullanımı) 251
4.6. Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları 255
4.7. 30°, 45° Ve 60° Açılarının Trigonometrik Oranları 257
4.8. Aynı Açı Alpha İçin Trigonometrik Oranlar 260
4.9. Dik Üçgen Çözümü 262
4.10. Üçgenin Alanı 265
4.11. Trigonometrik Oranların Problem Durumlarında Uygulanması 267
4.12. İki Doğrunun Bir Keseni Üzerindeki Açılar 274
4.13. Çokgen 279
4.14. Çember Ve Daire 284
4.15. Düzlemde Verilen Bir Alanın Kaplanması 290
4.16. Benzer Üçgenler 294
4.17. Benzerliğin Uygulanması 300
TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR 305

KONU 5: ÖLÇME
5.1. 2B-Şekillerin Çevresi ve Alanı 310
5.2. İçteğet ve Çevrel Çember Yarıçapının Hesaplanması 316
5.3. Dairenin ve Daire Parçalarının Alanı 318
5.4. Teoremlerin Problem Durumlarında Uygulanması 321
5.5. 3B-Biçimlerin Alanı ve Hacmi 324
5.6. Silindir. Silindirin Alanı ve Hacmi 328
5.7. 3B-Şekillerin Alan ve Hacminin Uygulanması 332
TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR 335

KONU 6: VERİLERLE ÇALIŞMA
6.1. Deneysel Olasılık 339
6.2. Klasik Olasılık 343
6.3. Verilerin Toplanması 346
6.4. Verilerin Grafiksel Olarak Gösterilmesi 349
6.5. Verilerin işlenmesi ve yorumlanması 360
TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR 364

Konu 1:

SAYILAR VE SAYILARLA İŞLEMLER

Bu konuyu işlerken şu becerilere sahip olacaksın:

1. Problem durumlarını çözerken kümelerle ilgili bilgilerini uygulamak;
2. Gerçek sayıları ve onlarla yapılan işlemleri kullanarak bir problemi kurmak, çözmek ve çözümle ilgili sonuca varmak;
3. Oran, orantı ve yüzdeyi kullanarak farklı alanlardaki (ekonomi, eğitim, tıp, inşaat vb.) problemleri çözmek.

01

1.1. Küme. Alt Küme

Küme Kavramı

ETKİNLİK

Verilen sayılar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Onları ortak bir özelliğe göre grupla

a) iki gruba, b) üç gruba.

Küme kavramı matematikte temel bir kavramdır ve bu nedenle başka kavramlarla tanımlanmaz. Her küme, kendilerine ait ortak bir karakteristik özelliğe göre bir bütün hâlinde birleştirilmiş nesnelerden oluşur.

ÖRNEK 1

Bir küme şunlardan oluşur:

a) bir sınıftaki tüm öğrenciler, b) Prespa Gölü'ndeki tüm balıklar.

Kümeyi oluşturan nesnelere kümenin **elemanları** denir.
Kümeler büyük harflerle gösterilir: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$; her kümenin elemanları ise Latin alfabesinin küçük harfleriyle gösterilir: $a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$.



Bir kümenin elemanlarını oluşturan nesneler için onların kümeye **ait** olduklarını söyleriz. Eğer a elemanı A kümesine aitse, şu şekilde yazarız: $a \in A$.

Eğer a elemanı A kümesine ait değilse, şu şekilde yazarız: $a \notin A$. Hiçbir eleman içermeyen kümeye **boş küme** denir ve $\varnothing$ sembolü ile gösterilir.

SORU 1

a) İkiden fazla dik açıya sahip üçgenlerden oluşan küme boş küme midir?

b) Gezegenimizde yaşayan üç yüz yaşındaki insanlardan oluşan küme boş küme midir?

Kümelerin Veriliş Yöntemleri

Bir kümenin **iyi tanımlanmış** olduğu, her nesne için onun bu kümeye ait olup olmadığı açıkça söylenebildiğinde ifade edilir.

SORU 2

Aşağıdaki kümeler iyi tanımlanmış mıdır?

a) mutfağındaki tüm kaşıklar kümesi b) tüm yaşlı kediler kümesi

ÖRNEK 2

Tüm bir basamaklı doğal sayılardan oluşan M kümesini ele alalım. Açıktır ki, M kümesinin elemanları şunlardır: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve bunların dışında M kümesinin başka elemanları yoktur. Bunu şu şekilde yazarız: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bu tür bir küme gösterimine **tablo yöntemi** denir. Dikkat et ki, yazılan elemanlar süslü parantezler içinde ve virgülle ayrılmıştır. Kümeler tablo yöntemiyle verildiğinde elemanların yazılma sırası önemli değildir.

Yukarıdaki küme veriliş biçiminin dışında, başka bir yöntem daha vardır ki buna **açıklama yöntemi** denir. Bu yöntemde kümeye ait tüm elemanların ortak karakteristik özelliği belirtilir ve bu özelliğe sahip olmayan hiçbir eleman kümeye dahil edilmez.

ÖRNEK 3

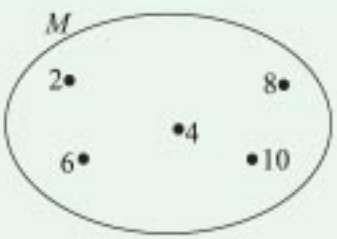
S, doğum günü her dört yılda bir olan tüm öğrencilerden oluşan küme olsun. Bu kümenin elemanlarının ortak özelliği, her birinin 29 Şubat'ta doğmuş olmasıdır. Bunu şu şekilde yazarız: $S = \{ x \mid x$, 29 Şubat'ta doğmuştur $\}$.

Şöyle okunur: S, tüm elemanları x olan bir kümedir; öyle ki x, 29 Şubat'ta doğmuştur.

Kümeleri incelerken çıkarımların kolaylaştırılması için grafik çizimler kullanırız – bunlara **Venn diyagramları** denir. Her küme M, rastgele seçilmiş kapalı bir eğri ile çevrelenmiş nokta kümesiyle gösterilir. İşaretlenmiş noktalar, bazen de eğrinin üzerindeki ve onunla çevrilmiş düzlem bölgesindeki tüm noktalar, küme M'nin elemanları olarak kabul edilir.

ÖRNEK 4

Şekil 1'de, $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ kümesinin Venn diyagramı gösterilmiştir.



Şekil 1

Alt Küme

ETKİNLİK

Bir programcı şu programlama dillerini bilmektedir: $P = \{$Python, Java, C++, JavaScript$\}$

Yeni proje için ise şu diller gerekmektedir: $R = \{$Python, JavaScript$\}$

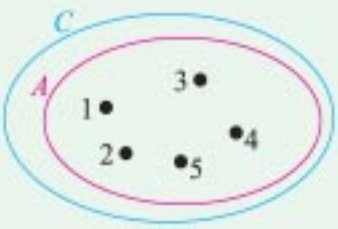
Programcı yeni projeye dahil olabilir mi?

ÖRNEK 5

Aşağıdaki kümeler verilsin: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Küme A'nın her elemanı, küme B'ye aittir. Ancak küme B'de, örneğin 7 elemanı, küme A'ya ait değildir (Şekil 2).
Küme A'nın her elemanı, küme C'ye aittir ve küme C'nin her elemanı da küme A'ya aittir (Şekil 3).



Şekil 2



Şekil 3

Küme A, ancak ve ancak küme A'nın her elemanı küme B'ye aitse, küme B'nin alt kümesidir. Bu durum şu şekilde yazılır: $A \subseteq B$.

ÖRNEK 6

a) Şekil 2'de gösterilen A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ geçerlidir.
b) Boş küme her kümenin alt kümesidir. Neden?
c) Şekil 2'de gösterilen A ve C kümeleri için $A \subseteq C$ ve $C \subseteq A$ geçerlidir.

İki küme A ve B, ancak ve ancak her biri diğerinin alt kümesi olduğunda eşittir, yani $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$. Bu durum şu şekilde yazılır: $A = B$.

ÖRNEK 7

A kümesi, "мечка" (ayı) kelimesinin harflerinden oluşsun ve B kümesi, "камче" (çakıl) kelimesinin harflerinden oluşsun. Kümeleri tablo yöntemiyle yazalım:

$A = \{м, е, ч, к, а\}$ ve $B = \{к, а, м, ч, е\}$.

Görüyoruz ki $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$, bu da $A = B$ anlamına gelir; yani verilen kümeler eşittir.

Küme A, küme B'nin **gerçek alt kümesidir**; eğer küme A'nın her elemanı küme B'ye aitse ve küme B'de küme A'ya ait olmayan en az bir eleman varsa. Bu durum şu şekilde yazılır: $A \subset B$.

ÖRNEK 8

a) Tüm paralelkenarların kümesi, tüm dörtgenlerin kümesinin gerçek alt kümesidir.
b) Boş küme, her boş olmayan B kümesinin gerçek alt kümesidir.

SORU 3

Aşağıdaki ifadeler doğru mudur?
a) Çift sayılar kümesi, doğal sayılar kümesinin bir alt kümesidir.
b) Pekinez ırkı köpeklerin kümesi, tüm köpeklerin kümesinin gerçek alt kümesidir.

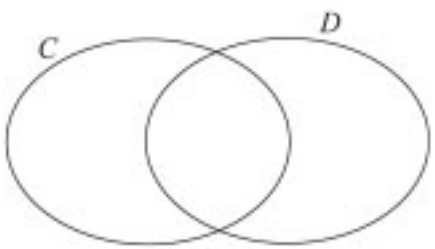
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kümeleri tablo yöntemiyle yazınız:
   a) $A = \{x \mid x$ yılın ayıdır$\}$ b) $B = \{x \mid x$, 6'nın bölenidir ve $40 \le x \le 70\}$
   c) $C = \{x \mid x$ asal sayıdır ve $20 \le x \le 30\}$ d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ ve $50 \le x^2 \le 100\}$

2. Elemanları ikinci onluktaki asal sayılar olan A kümesini gösteriniz:
   a) tablo yöntemiyle, b) Venn diyagramıyla, c) açıklama yöntemiyle.

3. Aşağıdaki koşullara göre A ve B kümelerini Venn diyagramıyla gösteriniz:
   $5 \in A, 5 \notin B, 3 \in A, 3 \in B, 7 \notin A, 7 \in B, 4 \in A, 4 \notin B$

4. $C = \{a, c, d, e, h\}$ i $D = \{b, c, e, f\}$.
   Çizim 4'teki Venn diyagramını yeniden çiz ve elemanları uygun yerlere yerleştir.



Şekil 4

5. Verilen küme $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ ve $-2 < x < 3\}$.
   Tümünü yaz:
   a) küme A'nın alt kümelerini
   b) küme A'nın gerçek alt kümelerini

6. Verilen küme $M = \{x \mid x$ ikinci onluktaki tek sayıdır$\}$. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?
   a) $\{15, 19\} \subset M$, b) $\{\emptyset\} \subseteq M$, c) $\emptyset \subset M$, d) $\{12, 14, 16\} \subseteq M$, e) $M \subseteq M$

7. x'i bul: a) $\{-1, 4\} \subset \{-5, -1, 3, x, 7\}$, b) $\{5, 7, 9\} \subset \{-2, 3, 5, 6, 9, x\}$, c) $\{2, 3\} \subset \{-2, 2, x\}$

8. Aşağıdaki kümelerden hangisi boş kümedir?
   a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \le 4\}$ b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}$ ve $x^2 = -1\}$
   c) $C = \{x \mid x$, 0 sayısının bölenidir$\}$ d) $D = \{x \mid x$, 0 sayısının katıdır$\}$

ARAŞTIRMA

"Bir köyde, berber Mile kendini tıraş etmeyen tüm erkekleri tıraş eder." Düşün ve keşfet neden küme iyi tanımlanmamıştır. Berber Mile'yi kim tıraş eder? Kümenin iyi tanımlı olması için yeni bir formülasyon vermeye çalış.

1.2. Denk Kümeler ve Kardinal Sayılar

Denk Kümeler

ÖRNEK 1

$A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{k, l, m, n\}$. kümeleri verilsin.

$a \; b \; c \; d$
$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$
$k \; l \; m \; n$

A kümesinin her bir elemanına, B kümesinden bir eleman eşleyebiliriz.

$k \; l \; m \; n$
$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$
$a \; b \; c \; d$

B kümesinin her bir elemanına, A kümesinden bir eleman eşleyebiliriz.

$k \; l \; m \; n$
$\updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow$
$a \; b \; c \; d$

A ve B kümelerinin elemanları arasında bire bir karşılık kurulmuştur.



A ve B kümeleri için şu koşullar sağlanıyorsa:

- A kümesindeki iki farklı elemana, B kümesinden farklı elemanlar karşılık gelmişse ve
- B'nin her elemanına A'dan en az bir eleman karşılık gelmişse, o hâlde A ile B arasında bire bir karşılıklılık kurulmuştur.



Birbirleriyle bire bir karşılık kurulabilen A ve B kümelerine denk kümeler denir. $A \sim B$ şeklinde yazılır. "A, B ile denktir" diye okunur.

ÖRNEK 2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{x \mid x$ haftanın bir günüdür$\}$ kümeleri denk midir?

Verilen kümeler denktir, çünkü aralarında bire bir karşılık kurulabilir:

1	2	3	4	5	6	7
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
pazartesi	salı	çarşamba	Perşembe	cuma	cumartesi	pazar

SORU 1

Finans analisti iki portföydeki yatırımları izler:
A = {hisse senetleri, tahviller, gayrimenkuller} ve B = {emtialar, hisse senetleri, kripto para birimleri}
A ve B kümeleri denk midir?

Eşit kümeler denktir. Tersinin her zaman geçerli olması gerekmez.

ÖRNEK 3

Aşağıdaki kümeler verilsin:
$A = \{x \mid x$ 10'dan küçük çift doğal sayıdır$\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
$C = \{x \mid x$ bir mevsimdir$\}$ ve D = {sonbahar, kış, ilkbahar, yaz}.
Verilen kümelerden hangileri denktir, hangileri eşittir?

A ve C kümelerini tablo yöntemiyle yazalım:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ ve C = {sonbahar, kış, ilkbahar, yaz}.

Eşit kümeler: $A = B$ ve $C = D$.

Denk kümeler: $A \sim B$, $A \sim C$, $A \sim D$, $B \sim C$, $B \sim D$ ve $C \sim D$.

SORU 2

Bir hızlı yemek restoranında öğle yemeği için aşağıdaki yemeklerden biri seçilebilir: tavuklu sandviç, balıklı sandviç, çiz burger veya tavuk parmakları. Hana ve Haris sunulanlara göre öğle yemeği satın alırlar. Menüyü esas alarak, öğle yemeği için Hana ve Haris'in seçebilecekleri iki farklı yemekten oluşan, denk fakat eşit olmayan iki alt kümeyi yazınız.

Kardinal Sayılar

ETKİNLİK

Ana, Ador, Simon, Tea ve Mila geziye gitmişlerdir. Her biri yanında bir sırt çantası taşımaktadır.

Geziciler A kümesini, onların sırt çantaları B kümesini oluşturur. Her sırt çantasının bir sahibi olduğu ve her gezicinin bir sırt çantası bulunduğu için iki küme denktir, yani $A \sim B$.

a) Gezicilerin sayısının sırt çantalarının sayısına eşit olmasını bekleyebilir miyiz? Yanıtını açıkla!

b) A kümesinin eleman sayısı kaçtır, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?



$\mathbb{N}_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ ilk m doğal sayıdan oluşan küme olsun ve A keyfi bir küme olsun.

a) A kümesine, $A = \emptyset$ ise veya $A \sim \mathbb{N}_m$ olacak şekilde bir doğal sayı m varsa, sonlu küme denir.

b) Eğer $A = \emptyset$ ise, o zaman A kümesinin eleman sayısının 0 olduğunu, yani A kümesinin kardinal sayısının 0 olduğunu söyleriz ve $k(A) = 0$ yazarız.

c) Eğer $A \sim \mathbb{N}_m$ ise, o zaman A kümesinin eleman sayısının m olduğunu, yani A kümesinin kardinal sayısının m olduğunu söyleriz ve $k(A) = m$ yazarız.

d) Eğer A kümesi sonlu ise, ayrıca $k(A) < \infty$ yazarız.

e) Eğer A kümesi sonlu değilse, A kümesinin sonsuz küme olduğunu söyleriz. Bu durumda $k(A) = \infty$ yazarız.

Sonsuz kümelerde de farklı kardinal sayılar vardır. Örneğin doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin ve gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin kardinal sayıları böyledir.

ÖRNEK 4

Kümenin kardinal sayısını bulun:

a) $A = \{1, 2, 3\}$ b) $B = \{a, b, c, d\}$ c) $C = \{\emptyset\}$ d) $D = \emptyset$

a) $k(A) = 3$ b) $k(B) = 4$ c) $k(C) = 1$ d) $k(D) = 0$

ÖRNEK 5

Kümenin kardinal sayısını bul:

a) M = {biyoloji, fizik, kimya, astronomi, jeoloji}

б) N = {matematik, enformatik, psikoloji, ekonomi, dilbilim, pedagoji}

a) $k(A) = 5$ b) $k(A) = 6$.

ÖRNEK 6

Kümenin kardinal sayısını bul:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 2 \leq x \leq 6\}$ b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ ve } -6 \leq x < 4\}$

Verilen kümeleri tablo yöntemiyle göstereceğiz.

a) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğundan, doğrudan $k(A) = 5$ olduğunu görürüz.

b) $B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$'ten $k(B) = 10$ sonucuna varırız.

SORU 3

Aşağıdakilerin kümesi:

a) doğal sayılar b) tam sayılar c) rasyonel sayılar

d) gerçek sayılar e) pozitif gerçek sayılar

f) bir nesnedeki atomlar sonlu mu yoksa sonsuz küme midir?

ÖRNEK 7

3 sayısının katları $S = \{3, 6, 9, ...\}$ kümesini oluşturur.

Verilen küme açıklama yöntemiyle şöyle yazılabilir: $S = \{n \mid n = 3m \text{ neresi } m \in \mathbb{N}\}$, bu da tüm doğal sayılar kümesi ile 3 sayısının tüm katları kümesi arasında bire bir karşılık olduğunu görmemizi sağlar:

$$\begin{array}{cccccc} 3=3\cdot 1 & & 6=3\cdot 2 & & 9=3\cdot 3 & & 12=3\cdot 4 & \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \cdots\cdots \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array}$$

Buna göre, 3 sayısının tüm katları kümesi ile tüm doğal sayılar kümesi denk kümelerdir, yani $S \sim \mathbb{N}$.

$S \subset \mathbb{N}$ olduğunu not edelim; bu, doğal sayılar kümesinin kendi gerçek alt kümesi ile denk olduğunu gösterir. Bu yalnızca sonsuz kümelerde gerçekleşebilir.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir biyoloji laboratuvarı bir Petri kabında 5 farklı bakteri türünü gruplad:
   $B = \{B1, B2, B3, B4, B5\}$. Başka bir kapta mantar örnekleri vardır: $F = \{F1, F2, F3, F4, F5\}$.
   Kümeler V ve F denktir mi? Cevabını açıkla!

2. Okulun voleybol takımı şu oyunculardan oluşur:
   {Ana, Beti, Kate, Esra, Maja, Tea, Petra, Jana}.
   Antrenörün bir sonraki maç için seçebileceği, altı oyuncudan oluşan, denk fakat eşit olmayan iki alt kümeyi yaz.

3. Bir makinenin parçaları kümeleri denk midir?
   $X = \{\text{vida, somun, dişli}\}$ ve $Y = \{\text{valf, pompa, ölçer}\}$.

4. Kümenin eleman sayısını bul:
   a) $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ b) $N = \{x \mid x \text{ asal sayıdır ve } x < 2\}$
   c) $P = \{2, 3, 4, \ldots, 99\}$ d) $Q = \{x \mid x \text{ bir doğal sayıdır ve } 6 < x < 35\}$

5. Kümenin kardinal sayısını bul:
   a) $A = \{H, O, N, Cl, Na\}$
   b) $B = \{\text{Python, Java, HTML, CSS, JavaScript, C++}\}$
   c) $C = \{\text{motor, direnç, kondansatör, diyot}\}$
   d) $C = \{\text{dizüstü bilgisayar, tablet, telefon, yönlendirici, klavye, monitör}\}$

6. Doğal sayılar kümesi ile aşağıdaki kümeler arasında bire bir karşılıklılık kur:
   a) çift doğal sayılar
   b) tek doğal sayılar

7. Doğal sayılar kümesi ile 1 ile başlayan ikili diziler kümesi arasında bire bir karşılıklılık kur:
   $B = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \ldots\}$

8. Bir otelde doğal sayılarla numaralandırılmış (1, 2, 3, ...) sonsuz sayıda tek kişilik oda vardır.
   Otelde boş oda yoktur ve yeni bir misafir gelir.
   Yeni misafir hangi yolla yerleştirilecektir?

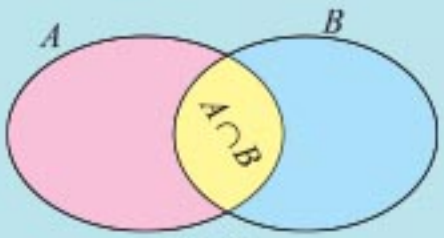
1.3. Kümelerle İşlemler

Kümelerin Kesişimi ve Birleşimi

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümeleri verilsin. 3, 4 ve 5 sayıları bunların ortak elemanlarıdır. Bu elemanlardan, A ve B kümeleri üzerinde yapılan bir işlemin sonucu olarak elde edildiğini söylediğimiz yeni bir C kümesi oluşturabiliriz.

$C = \{3, 4, 5\}$ kümesi ve bu kümenin elde edildiği işlem, A ve B kümelerinin kesişimi olarak adlandırılır ve $C = A \cap B$ ile gösterilir. Okunuşu: A kesişim B.

İki küme A ve B'nin kesişimi $A \cap B$ kümesi olarak adlandırılır; bu küme, A kümesine ve aynı zamanda B kümesine de ait olan tüm elemanlardan oluşur (Şekil 1):
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$



Şekil 1

ÖRNEK 1

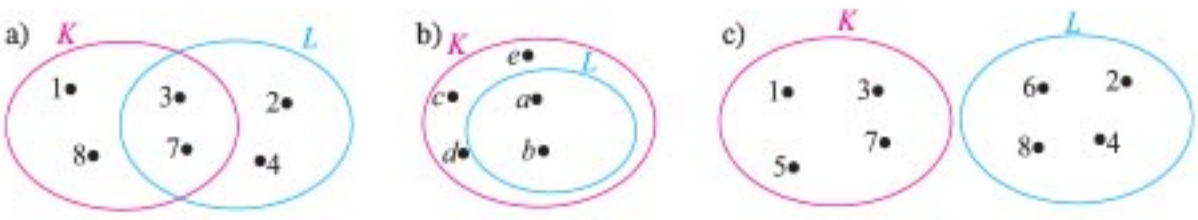
a) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 9, 15\} = \{3, 9\}$

b) R tüm ikizkenar üçgenlerin kümesi, P tüm dik üçgenlerin kümesi olsun.

Kesişim $R \cap P$, tüm ikizkenar dik üçgenlerin kümesidir.

ÖRNEK 2

K ve L kümeleri Şekil 2'de Venn diyagramı ile gösterilmiştir.
$K \cap L$ kümesini belirle.



Şekil 2

a) $K \cap L = \{3, 7\}$ b) $L \subset K$ olduğundan, $K \cap L = \{a, b\} = L$ c) $K \cap L = \emptyset$

Eğer A ve B kümelerinin ortak elemanları yoksa, kesişimleri boş kümedir, yani $A \cap B = \emptyset$.

Kesişimi boş küme olan iki kümeye ayrık (disjoint) kümeler denir.

ÖRNEK 3

a) $\{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing$

b) S, Sırbistan'daki tüm şehirlerin kümesi; T, Slovenya'daki tüm şehirlerin kümesi olsun. Bu iki küme ayrık kümelerdir, çünkü $S \cap T = \varnothing$ (Neden?).

SORU 1

a) Kümeleri tablo yöntemiyle yaz: $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } x < 8\}$ ve $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 5 < x < 10\}$.

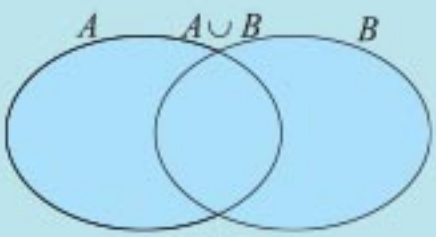
b) $E \cap F$ kümesini tablo yöntemiyle yaz.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{3, 5, 6, 8\}$ kümeleri verilsin. Bu iki kümeyi birleştirirsek $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ kümesini elde ederiz. 3 ve 5 elemanlarının hem A'ya hem de B'ye ait olduğunu görüyoruz, fakat birleşik küme S'de yalnızca birer kez alınmışlardır. Nedenini açıkla!

Bu şekilde elde edilen S kümesine, A ve B kümelerinin birleşimi denir ve $S = A \cup B$ biçiminde yazılır. Okunuşu: A birleşim B. Birleşim, A ve B kümeleri üzerinde uygulanıp sonuçta S kümesini veren işleme de denir.

Kümeler A ve B'nin birleşimi $A \cup B$ kümesi olarak adlandırılır; bu küme, bu kümelerden en az birine ait olan tüm elemanlardan oluşur (Şekil 3):

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$



Şekil 3

ÖRNEK 4

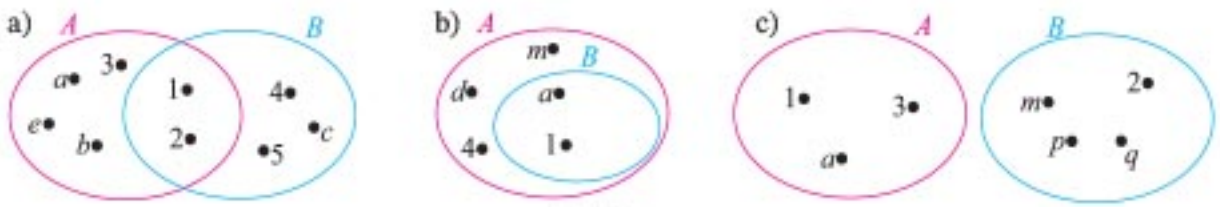
a) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$;

b) A tüm tek doğal sayılar kümesi, B tüm çift doğal sayılar kümesi olsun. Birleşimleri doğal sayılar kümesidir, yani $A \cup B = \mathbb{N}$

ÖRNEK 5

A ve B kümeleri Şekil 4'te Venn diyagramı ile gösterilmiştir.

$A \cup B$ kümesini tablo yöntemiyle yaz.



Şekil 4

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, e\}$

b) $B \subset A$ olduğundan $A \cup B = \{1, 4, a, d, m\} = A$

c) $A \cup B = \{1, 2, 3, a, m, p, q\}$

SORU 2

a) Kümeleri tablo yöntemiyle yazınız:
$E = \{x \mid x$ ikinci onluktaki çift sayıdır$\}$ ve $F = \{x \mid x$ ikinci onluktaki tek sayıdır$\}$.

b) $E \cup F$ kümesini tablo yöntemiyle yazınız.

ETKİNLİK

Verilen kümeler $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ve $C = \{1, 3, 4, 7\}$.
Aşağıdaki eşitlikler doğru mudur:

a) $A \cap B = B \cap A$ b) $A \cup B = B \cup A$

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Herhangi bir A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

a) $A \cap B = B \cap A$	kesişimin komütatif (değişme) özelliği
b) $A \cup B = B \cup A$	birleşimin komütatif (değişme) özelliği
c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	kesişimin assosiatif (birleşme) özelliği
d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	birleşimin assosiatif (birleşme) özelliği
e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	kesişimin birleşime göre dağılım (distributif) özelliği
f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	birleşimin kesişime göre dağılım (distributif) özelliği

SORU 3

Birleşimin ve kesişimin birleşme özelliğini şu kümeler için kontrol et:
$S = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0$ ve $x < 4\}$, $T = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ ve $1 < x < 6\}$ ve $R = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+$ ve $4 < x < 8\}$.
İki küme A ve B'nin birleşiminin kardinal sayısını belirleyelim.

Eğer A ve B kümeleri ayrık ise, birleşimin kardinal sayısı kümelerin kardinal sayılarının toplamıdır, yani $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$.
Eğer iki küme kesişiyorsa, o hâlde kesişim hem A kümesinin hem de B kümesinin bir alt kümesidir. Bu, A kümesinin kardinal sayısı ile B kümesinin kardinal sayısını topladığımızda kesişimi iki kez toplamış olacağımız anlamına gelir; bu nedenle formülde verildiği gibi bir kez çıkarmamız gerekir: $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$.

ÖRNEK 6

Eğer $k(A) = 10$, $k(B) = 20$ ve $k(A \cap B) = 4$ ise, $k(A \cup B)$ kaçtır?

İki kümenin birleşiminin kardinal sayısını hesaplama formülünü kullanarak elde ederiz: $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B) = 10 + 20 - 4 = 26$.

SORU 4

Hesapla:

a) $k(A \cup B)$, eğer $k(A) = 23$, $k(B) = 17$ ve $k(A \cap B) = 7$

b) $k(A \cup B)$, eğer $A \cap B = \emptyset$, $k(A) = 35$ ve $k(B) = 78$

c) $k(A \cap B)$, eğer $k(A) = 24$, $k(B) = 18$ ve $k(A \cup B) = 35$

ÖRNEK 7

Bir okulda matematik ve fizik dersleri veren 20 öğretmen vardır. Bunlardan 12'si matematik (M) ve 4'ü hem matematik hem fizik (F) dersleri vermektedir. Kaç öğretmen fizik dersi vermektedir?

Sorunun koşuluna göre $k(M \cup F) = 20$, $k(M) = 12$ ve $k(M \cap F) = 4$.
Birleşimin kardinal sayısını hesaplama formülünde yerine koyarak
$k(M \cup F) = k(M) + k(F) - k(M \cap F)$elde ederiz; buradan $220 = 12 + k(F) - 4$, buradan da
$k(F) = 12$. Toplam 12 öğretmen fizik dersi vermektedir.

SORU 5

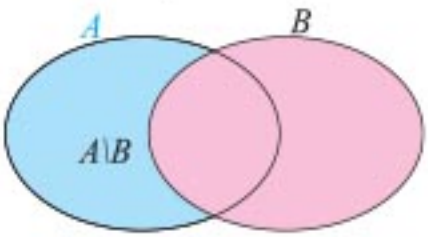
Bir sınıftaki 35 öğrenciden 15 öğrenci hentbol (R) oynamak ister, 26 öğrenci ise futbol oynamak ister. Kaç öğrenci futbol ve hentbol oynamak ister?

İki Kümenin Farkı

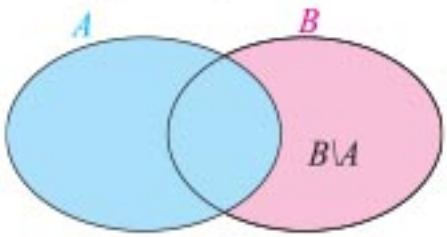
A, sınıftaki satranç kolundaki öğrencilerin kümesi; B ise sınıftaki tiyatro kolundaki öğrencilerin kümesi olsun. Bu iki kümeden şu iki yeni küme oluşturulabilir.
Bunlardan ilki, satranç kolundaki olup tiyatro kolunun üyesi olmayan öğrenciler kümesidir. Bu kümeye A kümesinin B kümesinden farkı denir, sembolik olarak $A \setminus B$ ile gösterilir ve şöyle okunur: A fark B.
Benzer şekilde, ikinci küme tiyatro kolundaki olup satranç kolunun üyesi olmayan öğrenciler kümesidir. Bu küme de bir fark kümesidir, ancak B kümesinin A kümesinden farkıdır. $B \setminus A$ yazarız.

Bir A kümesinin B kümesi ile farkı, $A \setminus B$ kümesidir; bu küme, A kümesinin B kümesine ait olmayan tüm elemanlarından oluşur, yani $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$.
Benzer şekilde, $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A\}$.

$A \setminus B$ ve $B \setminus A$ farkları, çizim 5 ve çizim 6'da Venn diyagramı ile gösterilmiştir.



Şekil 5



Şekil 6

ÖRNEK 8

a) $\{2, 4, 5, 7, 8\} \setminus \{3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 8\}$

b) A, bir sınıftaki 150 cm'den uzun öğrencilerin kümesi; B ise aynı sınıftaki 11 yaşındaki öğrencilerin kümesi olsun.

Fark $A \setminus B$, 150 cm'den uzun olup 11 yaşında olmayan öğrencilerden oluşur; fark $B \setminus A$ ise 11 yaşında olup 150 cm'den uzun olmayan öğrencilerden oluşur.

SORU 6

Verilen kümeler $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{1, 2, 4, 6\}$ ve $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a) $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$ ve $A \setminus (B \setminus C)$ kümelerini tablo yöntemiyle yaz.

b) $A \setminus B = B \setminus A$ eşitliği geçerli midir?

c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ eşitliğini kontrol et.

Kesinlikle fark etmişsindir ki, iki kümenin farkı işlemi için ne komütatif yasa ne de assosiatif yasa geçerlidir.

SORU 7

Verilen kümeler: $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } x < 6\}$, $P = \{3, 5, 7, 9\}$ ve $T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } x \text{ ilk onluktaki çift sayıdır}\}$.
Kümeleri belirle:

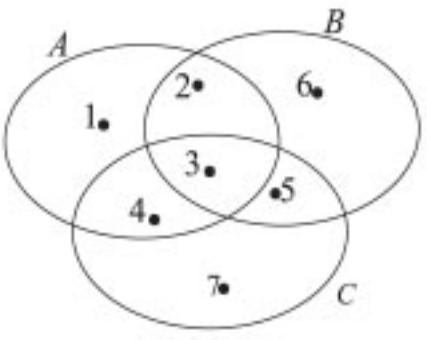
a) $T \setminus M$ b) $P \cup (M \setminus T)$ c) $T \cap (M \setminus P)$

SORU 8

Kümeler A, B ve C Venn diyagramıyla (şekil 7) verilmiştir.
Kümeleri tablo yöntemiyle yaz:

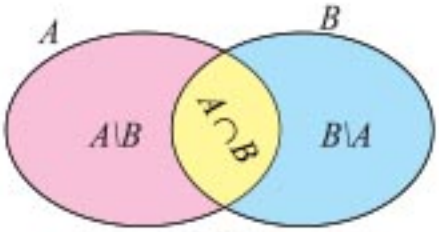
a) $A \cap C$ b) $B \cup A$ c) $B \setminus C$

d) $(A \cap B) \setminus C$ e) $(B \cup C) \setminus A$



Şekil 7

A ve B verilen kümeler olsun.
$A \setminus B$ kümesinin kardinal sayısı kaçtır?
$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ olarak yazabiliriz (şekil 8).
Kümeler $A \setminus B$ ve $A \cap B$ ayrık olduklarından, iki kümenin birleşiminin kardinal sayısını hesaplama formülünü uygularsak $k(A) = k(A \setminus B) + k(A \cap B)$ elde ederiz, buradan da $k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B)$ sonucu çıkar.



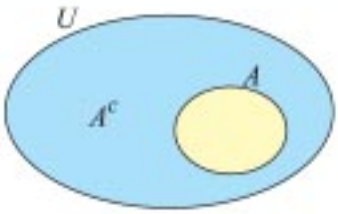
Şekil 8

ÖRNEK 9

Toplam 120 kişi C_1 kimyasalına maruz kalmıştır ve 50 kişi C_2 kimyasalına maruz kalmıştır, ayrıca 30 kişi her iki kimyasal olan C_1 ve C_2'ye maruz kalmıştır.
a) Kaç kişi C_1 kimyasalına maruz kalmış, fakat C_2 kimyasalına maruz kalmamıştır?
b) Kaç kişi C_2 kimyasalına maruz kalmış, fakat C_1 kimyasalına maruz kalmamıştır?

Problemin koşuluna göre elimizde $k(C_1) = 120$, $k(C_2) = 50$ ve $k(C_1 \cap C_2) = 30$ vardır.
İki kümenin farkının kardinal sayısını hesaplama formülünü uygulayarak elde ederiz:
a) $k(C_1 \setminus C_2) = k(C_1) - k(C_1 \cap C_2) = 120 - 30 = 90$ b) $k(C_2 \setminus C_1) = k(C_2) - k(C_1 \cap C_2) = 50 - 30 = 20$
Yani 90 kişi C_1 kimyasalına maruz kalmış, fakat C_2 kimyasalına maruz kalmamıştır, ve 20 kişi C_2 kimyasalına maruz kalmış, fakat C_1 kimyasalına maruz kalmamıştır.

İki kümenin farkını belirlerken A ve U,
ilgi çekici olan durum $A \subset U$'dur (şekil 9).
O zaman $U \setminus A$ farkına, U kümesine göre A kümesinin tümleyeni denir ve A^c ile gösterilir. Yani, $A^c = U \setminus A$.
Tümleyeni aradığımız U kümesi genellikle sabittir ve evrensel küme olarak adlandırılır.
Buna göre, evrensel küme U'ya göre A kümesinin tümleyeninin kardinal sayısını şu formülle hesaplayabiliriz: $k(A^c) = k(U) - k(A)$.



Şekil 9

ÖRNEK 10

A = {salı, perşembe} kümesinin tümleyeni, çizim 10'da gösterildiği üzere, evrensel küme
U = {x | x haftanın bir günüdür}'ye göre
A^c = {pazartesi, çarşamba, cuma, cumartesi, pazar} kümesidir (çizim 11).



Şekil 10



Şekil 11

$k(A^c) = k(U) - k(A) = 7 - 2 = 5$ olduğunu hesaplayabiliriz.

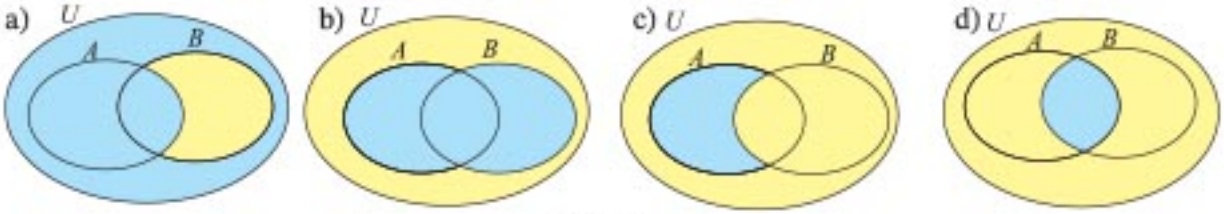
SORU 9

Bir okulda 400 öğrenciden, 100 öğrenci çilek suyu, 150 öğrenci elma suyu, 75 öğrenci ise hem çilek hem elma suyu tüketmektedir. Kaç öğrenci ne çilek suyu ne de elma suyu tüketmektedir?
Eşitliği kullan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi verilmiştir. Aşağıdaki kümeleri bulunuz:
   a) $A \cap A$ b) $A \cap \varnothing$ c) $A \cup A$ ç) $A \cup \varnothing$ d) $A \setminus A$ e) $A \setminus \varnothing$ f) $\varnothing \setminus A$

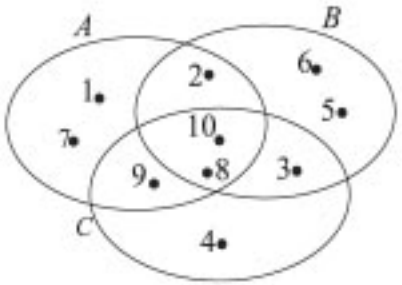
2. Çizim 12'deki Venn diyagramında sarı renkle boyalı kümeyi yazınız.



Şekil 12

3. Verilen kümeler: $M = \{x \mid x$, 6'nın bölenidir$\}$, $P = \{x \mid x$, 6'nın katıdır ve $x < 20\}$, $N = \{x \mid x$, 12 ve 18'in ortak bölenidir$\}$. Tablo halinde aşağıdaki kümeleri yazınız:
   a) $M \cap N$ b) $M \cup P$ c) $N \setminus P$ d) $M \setminus (N \cap P)$ e) $M \setminus (N \cup P)$

4. Venn diyagramına göre, çizim 13'te, kümeyi tablo halinde yazınız:
   a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cap B \cap C'$
   c) $A \cap B' \cap C$ d) $A \cap B' \cap C$
   e) $A \cap (B \cup C)'$ f) $A' \cap B \cap C$
   g) $C \cap (A \cup B)'$ h) $B \cap (A \cup C)'$



Şekil 13

5. Aşağıdaki kümelerin tümleyenini yazınız; evrensel küme doğal sayılar kümesidir:
   a) $\{x \mid x$ asal sayıdır$\}$ b) $\{x \mid x$, 3 ve 5 ile bölünebilir$\}$
   c) $\{x \mid x$ tam kare sayıdır$\}$ d) $\{x \mid x + 5 = 8\}$
   e) $\{x \mid x \geq 5\}$ f) $\{x \mid 2x + 1 \geq 9\}$

6. x'in değerini bulun:
   a) $\{-4, 1, 0\} \cap \{-5, x, 1, 11\} = \{0, 1\}$ b) $\{5, x, -7\} \cap \{-5, 2, 4, 5, -7, 18\} = \{2, 5, -7\}$

7. Verilen kümeler $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ve $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
   Aşağıdaki kümeleri bulunuz:
   a) $A \setminus B$ b) $B \setminus C$ c) $B \setminus A$ d) $(A \cup B) \setminus C$ e) $(C \setminus A) \cap B$ f) $(A \cup B) \setminus (B \cup C)$
   Daha sonra elde edilen her bir kümenin kardinal sayısını belirleyiniz.

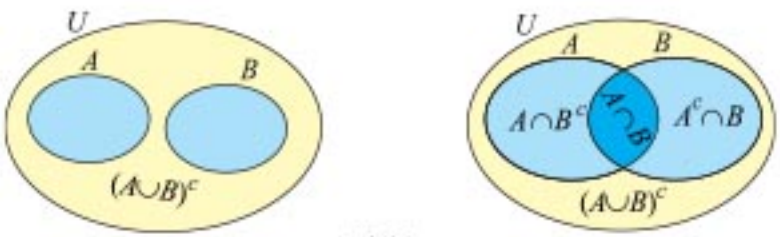
8. A ve B kümelerini bulunuz; $A \cup B = \{a, b, c\ 4, 7, 9\}$, $A \setminus B = \{4, b\}$ ve $B \setminus A = \{c, 7\}$.

9. Bir öğrenci grubunda, 100 öğrenci İngilizce konuşuyor, 50 öğrenci Almanca konuşuyor ve 25 öğrenci her iki dili konuşuyor. Her öğrenci en az bir dil konuşuyor.
Grup kaç öğrenciden oluşmaktadır?

10. Bir okulda 70 öğrenci futbol oynuyor, 50 öğrenci basketbol oynuyor ve 100 öğrenci bu iki spordan en az birini yapıyor. Kaç öğrenci hem futbol hem basketbol oynamaktadır?

1.4. Kümelerin Uygulanmasıyla Problem Çözme

Evrensel küme U ve onun iki altkümesi A ve B verilsin. İki altküme A ve B, ayrık olup olmadıklarına ya da kesişip kesişmediklerine bağlı olarak (şekil 1), birleşimi evrensel küme olan 3 veya 4 ayrık altkümeye evrensel kümeyi bölecektir.

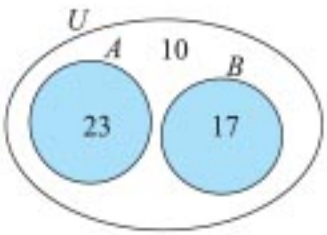


Şekil 1

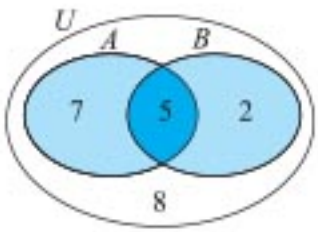
ÖRNEK 1

Evrensel küme U ve onun iki altkümesi A ve B verilmiştir.

a) Şekil 2'de gösterilen, ayrık altkümeler A ve B'nin Venn diyagramına göre elimizde:
$k(A) = 23$, $k(B) = 17$ ve $k(A \cup B)^c = 10$'dur.
Buradan örneğin, $k(A \cup B) = 23 + 17$ ve $k(U) = 23 + 17 + 10 = 50$ bulunur.



Şekil 2



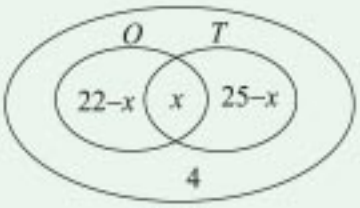
Şekil 3

b) Şekil 3'te gösterilen, kesişen A ve B altkümelerinin Venn diyagramına göre:
$k(A \cap B^c) = 7$, $k(A \cap B) = 5$, $k(B \cap A^c) = 2$ ve $k(A \cup B)^c = 8$.
Buradan elde ederiz:
$k(A) = 7 + 5 = 12$, $k(B) = 2 + 5 = 7$, $k(A \cap B) = 5$,
$k(A \cup B) = 7 + 5 + 2 = 14$ ve $k(U) = 7 + 5 + 2 + 8 = 22$.

ÖRNEK 2

Bir spor kulübünde 35 kız üye bulunmaktadır. Bunlardan 22'si voleybol (O), 25'i tenis (T) oynamakta, 4'ü ise ne voleybol ne de tenis oynamaktadır. Kaç kız voleybol ve tenis oynamaktadır?

x, voleybol ve tenis oynayan kızların sayısı olsun (Şekil 4).



Şekil 4

Toplam 22 kız voleybol oynamaktadır, o hâlde voleybol oynayıp tenis oynamayanların sayısı $22 - x$'tir.

Toplam 25 kız tenis oynamaktadır, o hâlde tenis oynayıp voleybol oynamayanların sayısı $25 - x$'tir.

4 kız ne voleybol ne de tenis oynamaktadır.

Kulüpte toplam kız sayısı 35'tir.

Denklemi kuruyoruz: $(22 - x) + x + (25 - x) + 4 = 35$

Bunun çözümü $x = 16$'dır.

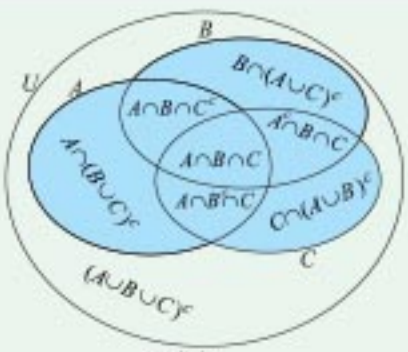
Dolayısıyla, voleybol ve tenis oynayan kızların sayısı 16'dır.

SORU 1

Rada ve Petra düğün şöleninde ana yemekle birlikte çorba ve salata servis etmektedir. Düğün şölenine toplam 150 misafir katılmıştır. Bunlardan 92 misafir çorba, 85 misafir salata sipariş etmiş, 23 misafir ise ne çorba ne de salata sipariş etmiştir. Kaç misafir hem çorba hem salata sipariş etmiştir?

ÖRNEK 3

Evrensel küme U ve onun üç altkümesi A, B ve C verilsin; bunlar ikişerli olarak kesişmektedir. Bu kümeler, evrensel kümeyi birleşimleri evrensel küme olan 8 ayrık altkümeye bölerler (Şekil 5).



Şekil 5

ÖRNEK 4

Şekil 6'da gösterilen, kesişen A, B ve C altkümelerinin Venn diyagramına göre:
$k(A \cap (B \cup C)^c) = 3$, $k(A \cap B \cap C^c) = 2$, $k(A \cap B^c \cap C) = 4$, $k(A \cap B \cap C) = 5$,
$k(B \cap (A \cup C)^c) = 10$, $k(A^c \cap B \cap C) = 7$, $k(C \cap (A \cup B)^c) = 11$ ve $k(A \cup B \cup C)^c = 1$.

Bu örnekten şunları elde ederiz:

$k(A) = 3 + 2 + 5 + 4 = 14$,

$k(B) = 10 + 2 + 5 + 7 = 24$,

$k(C) = 11 + 4 + 7 + 5 = 27$,

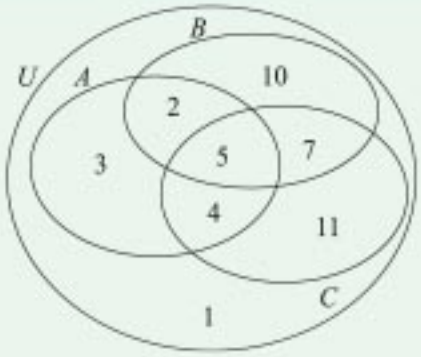
$k(A \cap B) = 2 + 5 = 7$,

$k(A \cap C) = 4 + 5 = 9$,

$k(B \cap C) = 5 + 7 = 12$,

$k(A \cup B \cup C) = 3 + 10 + 11 + 2 + 4 + 7 + 5 = 42$ ve

$k(U) = 3 + 10 + 11 + 2 + 4 + 7 + 5 + 1 = 43$.



Şekil 6

ÖRNEK 5

Bir spor kulübünde 38 üye bulunmaktadır.
3 üye futbol (F), basketbol (K) ve tenis (T) oynamaktadır.
4 üye ne futbol ne basketbol ne de tenis oynamaktadır.
19 üye futbol, 16 üye basketbol, 12 üye tenis oynamaktadır.
7 üye futbol ve basketbol, 4 üye basketbol ve tenis oynamaktadır.
a) Venn diyagramıyla gösteriniz. b) Kaç üye futbol ve tenis oynamaktadır?

x, futbol ve tenis oynayan üyelerin sayısı olsun (Şekil 7). Problemin koşuluna göre:

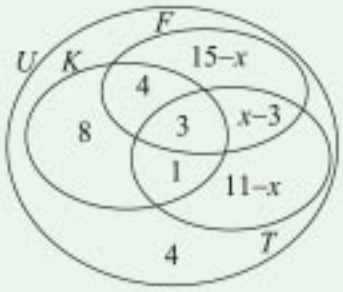
3 üye futbol, basketbol ve tenis oynamaktadır.

$x - 3$ üye futbol ve tenis oynayıp basketbol oynamamaktadır.

$4 - 3 = 1$ üye basketbol ve tenis oynayıp futbol oynamamaktadır.

$7 - 3 = 4$ üye basketbol ve futbol oynayıp tenis oynamamaktadır.

$16 - 1 - 3 - 4 = 8$ üye basketbol oynamakta, fakat ne futbol ne de tenis oynamamaktadır.



Şekil 7

$19 - 4 - 3 - (x - 3) = 15 - x$ üye futbol oynamakta, fakat ne basketbol ne de tenis oynamamaktadır.

$12 - 1 - 3 - (x - 3) = 11 - x$ üye tenis oynamakta, fakat ne futbol ne de basketbol oynamamaktadır.

4 üye ne futbol ne basketbol ne de tenis oynamaktadır.

Buna göre, denklemi kurarız:

$8 + 1 + 4 + 3 + (x - 3) + (15 - x) + (11 - x) + 4 = 38$

buradan çözüm $x = 5$'tir.

Futbol ve tenis oynayan üyelerin sayısı 5'tir.

ÖRNEK 6

Bir lisede birinci sınıfta en fazla kaç öğrenci öğrenim görmektedir, eğer:
47 öğrenci basketbol kulübüne (K) üye ise;
45 öğrenci futbol kulübüne (F) üye ise;
13 öğrenci satranç kulübüne (Ş) üye ise?
37 öğrenci İngilizce kulübüne (A) üyedir;

15 öğrenci matematik kulübüne (M) üyedir;
12 öğrenci basketbol kulübüne ve futbol kulübüne üyedir;
15 öğrenci basketbol kulübü ve İngilizce kulübüne üyedir;
17 öğrenci futbol kulübü ve İngilizce kulübüne üyedir;
10 öğrenci satranç kulübü ve matematik kulübüne de üyedir;
2 öğrenci futbol, basketbol ve İngilizce kulüplerine üyedir;
5 öğrenci hiçbir kulübe üye değildir?

x, lisede birinci sınıfta okuyan öğrencilerin sayısı olsun (Şekil 8).

Problemin koşuluna göre:

$12 - 2 = 10$ öğrenci basketbol ve futbol kulüplerine üyedir, ancak İngilizce kulübüne üye değildir;

$17 - 2 = 15$ öğrenci futbol kulübü ve İngilizce kulübüne üyedir, ancak basketbol kulübüne üye değildir;

$15 - 2 = 13$ öğrenci basketbol kulübü ve İngilizce kulübüne üyedir, ancak futbol kulübüne üye değildir;

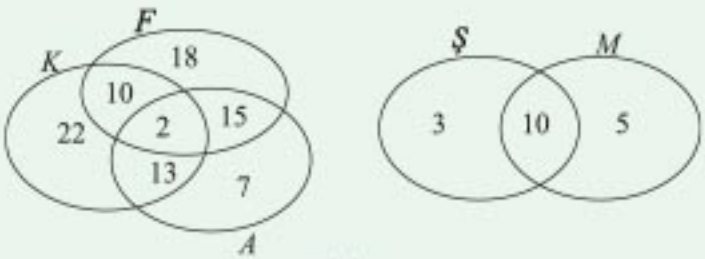
Böylece elde ederiz ki:

$47 - 13 - 10 - 2 = 22$ öğrenci basketbol kulübüne üyedir, ancak futbol kulübüne ve İngilizce kulübüne üye değildir;

$45 - 15 - 10 - 2 = 18$ öğrenci futbol kulübüne üyedir, ancak basketbol kulübüne ve İngilizce kulübüne üye değildir;

$37 - 15 - 13 - 2 = 7$ öğrenci İngilizce kulübüne üyedir, ancak futbol kulübüne ve basketbol kulübüne üye değildir;

$22 + 18 + 7 + 10 + 13 + 15 + 2 = 87$ öğrenci futbol kulübünde veya basketbol kulübünde veya İngilizce kulübünde üyedir.



Şekil 8

$15 - 10 = 5$ öğrenci matematik kulübüne üyedir ve satranç kulübüne üye değildir;

$13 - 10 = 3$ öğrenci satranç kulübüne üyedir ve matematik kulübüne üye değildir;

$3 + 5 + 10 = 18$ öğrenci satranç kulübünde veya matematik kulübünde üyedir;

Öğrencilerin toplam sayısını maksimize etmek istiyoruz, bu da (halihazırda verilenler dışında) kümelerin kesişimlerini minimize etmemiz gerektiği anlamına gelir. Böylece, basketbol kulübüne veya futbol kulübüne ya da İngilizce kulübüne üye olan öğrencilerden hiçbiri matematik kulübüne veya satranç kulübüne üye değilse, en büyük öğrenci sayısına sahip oluruz. 5 öğrenci hiçbir kulübe üye olmadığından, eşitsizliği kurabiliriz

$x \leq 87 + 18 + 5$, bunun çözümü $x \leq 110$'dur.

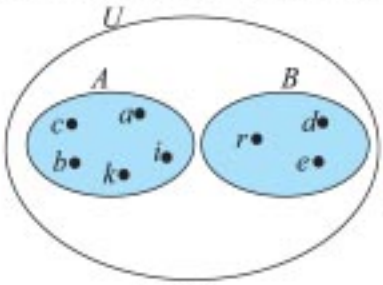
Lisede birinci sınıfta en fazla 110 öğrenci okumaktadır.

SORU 2

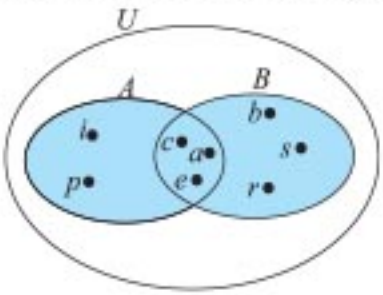
Konferansa katılan ve önceden öğle yemeği sipariş eden 50 kişilik bir grup, seçimlerine göre çorba, salata veya sandviç seçebildi. Toplam 17 kişi çorba, 29 kişi salata ve 35 kişi sandviç seçti. Bu siparişlerden 11 katılımcı çorba ve salata, 10 katılımcı çorba ve sandviç, 18'i ise salata ve sandviç seçti. Kaç katılımcı çorba, salata ve sandviç seçti?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Evrensel küme $U = \{a, b, c, \ldots, z\}$ verilsin.
   a) Şekil 9'daki Venn diyagramına göre bulun: $k(A)$, $k(B)$ ve $k(A \cup B)$.
   b) Şekil 10'daki Venn diyagramına göre bulun: $k(A)$, $k(B)$, $k(A \cap B)$, $k(A \cup B)$ ve $k(U)$.



Şekil 9



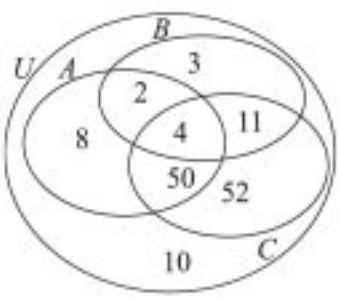
Şekil 10

2. David 15. doğum günü kutlamasında pasta ve dondurma servis ediyor. Partide toplam 54 misafir vardır. 30 misafirin pasta aldığı, 20 misafirin dondurma aldığı ve 12 misafirin ne pasta ne de dondurma almadığı varsayılsın. Kaç misafir pasta ve dondurma almıştır?

3. Herakleia'yı ziyaret eden 50 turistten 35'i İngilizce, 20'si Almanca konuşuyor ve 15 turist her iki dili konuşuyor. Kaç turist iki dilden hiçbirini konuşmuyor?

4. Bir okulda 600 öğrenci vardır. Bunlardan 150 öğrenci çay, 225 öğrenci limonata seviyor, 100 öğrenci çay ve limonata seviyor. Kaç öğrenci ne çay ne de limonata seviyor?

5. Şekil 11'deki Venn diyagramına göre bulun:
   $k(A)$, $k(B)$, $k(C)$, $k(A \cap B)$, $k(A \cap C)$, $k(B \cap C)$, $k(A \cup B \cup C)$ ve $k(U)$.



Şekil 11

6. Bir okulun resim kulübü kendi 42 üyesi arasında bir anket yaptı ve bunlardan 23'ünün yağlı pastel boyalar, 28'inin sulu boyalar ve 17'sinin renkli kalemler kullandığını ortaya koydu. Bunlardan 10 kulüp üyesi tüm boya türlerini, 18'i yağlı pastel boyalar ve sulu boyaları, 11'i sulu boyalar ve renkli kalemleri ve 12'si yağlı pastel boyalar ve renkli kalemleri kullanmıştır. Kulübün geri kalan üyeleri üç boya türünden hiçbirini kullanmamıştır.
   a) Kaç kulüp üyesi yalnızca yağlı pastel boyalar kullanmıştır?
   b) Kaç kulüp üyesi üç boya türünden hiçbirini kullanmamıştır?

7. 60 katılımcıdan oluşan bir grupta yapılan bir araştırmada, 25 katılımcı A gazetesini okumuş, 26 katılımcı B gazetesini okumuş, 26 katılımcı C gazetesini okumuş, 9'u A ve C gazetesini okumuş, 11'i A ve B gazetesini okumuş, 8'i B ve C gazetesini okumuş ve 3 katılımcı her üç gazeteyi okumuştur.
   a) En az bir gazete okuyan kaç katılımcı vardır?
   b) Tam olarak bir gazete okuyan kaç katılımcı vardır?

8. Bir ortaokulda, öğrenciler fen bilimleri alanında seçmeli kurslara katılmaktadır:
   50 öğrenci biyoloji (B) kursuna katılmaktadır;
   38 öğrenci kimya (K) kursuna katılmaktadır;
   36 öğrenci fizik (F) kursuna katılmaktadır;
   20 öğrenci astronomi (A) kursuna katılmaktadır;
   18 öğrenci biyoloji ve kimya kurslarına katılmaktadır;
   15 öğrenci kimya ve fizik kurslarına katılmaktadır;
   10 öğrenci biyoloji ve fizik kurslarına katılmaktadır;
   5 öğrenci astronomi ve fizik kurslarına katılmaktadır;
   6 öğrenci üç kursa: biyoloji, kimya ve fizik kurslarına katılmaktadır;
   7 öğrenci bu kurslardan hiçbirine katılmamaktadır.
   Okulda en fazla kaç öğrenci olabilir?

ARAŞTIRMA

Evrensel küme U ve onun dört altkümesi A, B, C ve D verilsin; bunlar ikişerli olarak kesişmektedir. Bunlar, birleşimi evrensel küme olan ayrık altkümelere evrensel kümeyi bölerler.

a) Evrensel küme kaç ayrık altkümeye bölünmüştür?

b) Bu tür altkümelerin tümünü yazınız.

1.5. Kümelerin Kartezyen Çarpımı

Sıralı Çift

ETKİNLİK

Roma 42° enlem ve 12° boylam üzerinde bulunur. Cibuti 12° enlem ve 42° boylam üzerinde bulunur. {42°, 12°} ve {12°, 42°} kümeleriyle Roma ve Cibuti'nin coğrafi konumu tam olarak belirlenmiş midir?

ÖRNEK 1

Kümeler {1, 2} ve {2, 1} eşittir, yani {1, 2} = {2, 1}, çünkü bir kümede elemanların yazılış sırası önemli değildir.

Matematikte ve günlük hayatta ise bazen bir kümedeki elemanların sırası önemlidir (birinci, ikinci, üçüncü, ...). Örneğin, hepimiz sol ve sağ ayakkabı, sol ve sağ eldiven arasında fark gözetiriz vb.

ÖRNEK 2

Kesirler $\frac{4}{5}$ ve $\frac{5}{4}$'ü ele alalım. Bunlar aynı doğal sayılar 4 ve 5 ile yazılmış olsalar da, yazılış sırası, okunma biçimi ve değerleri bakımından farklıdırlar. İlk kesirde 4 birinci sıradadır, paydadır, kesir çizgisinin üstünde; 5 ikinci sıradadır, paydadır, kesir çizgisinin altında. İkinci kesirde ise 4 ikinci sırada, 5 birinci sıradadır. Bu kesirlerin, genel durumda da her kesirin, doğal sayılardan oluşan bir sıralı çift temsil ettiğini söyleriz.

ÖRNEK 3

Dikkatimizi iki basamaklı sayılar 27 ve 72'ye çevirelim. Bunlar aynı rakamlar 2 ve 7 ile yazılmış olsalar da yazılış ve okunma sıraları bakımından farklıdır. 27 sayısında rakam 2 birinci sıradadır ve onlar basamağını gösterir, 72 sayısında ise ikinci sıradadır ve birler basamağını gösterir.

Bu nedenle, iki basamaklı sayıların yazımında kullanılan rakamların sıralı çiftler oluşturduğunu söyleriz, çünkü yazımda hangi rakamın birinci sırada, hangisinin ikinci sırada olduğu özel bir önem taşır.



Bir çift eleman a, b için, eğer eleman a birinci, eleman b ikinci eleman olarak belirlenirse bunun bir sıralı çift olduğunu söyleriz ve sembolik olarak (a, b) ile gösteririz.
Sıralı çiftin (a, b) elemanında a birinci bileşen, b ise ikinci bileşen olarak adlandırılır.

ÖRNEK 4

Sıralı çift (4, 7)'nin birinci bileşeni sayı 4, ikinci bileşeni ise sayı 7'dir.

SORU 1

Birinci bileşeni M harfi, ikinci bileşeni sayı 3 olan bir sıralı çifti yazınız.

Sıralı çiftin elemanları (a, a) gibi aynı da olabilir, fakat o zaman elemanların sırasından söz etmek anlamsız olur.

SORU 2

$P = \{0, 1\}$ kümesinin elemanlarından sıralı çiftleri yazınız. Kaç sıralı çift yazdınız? Kaç sıralı çiftin birinci ve ikinci bileşeni eşittir?

SORU 3

Tiyatroda oturma yerleri, birincisi sırayı, ikincisi koltuğu gösteren sayılardan oluşan sıralı çiftlerle belirtilebilir (Şekil 1).

Sıralı çiftler (1, 2) ve (2, 1) eşit midir?

Halklar Tiyatrosu
Sıra 2
Koltuk 1

Şekil 1

İki sıralı çift (a, b) ve (c, d), ancak ve ancak $a = c$ ve $b = d$ olduğunda eşittir. Bu durumda $(a, b) = (c, d)$ diye yazarız.

Sıralı çiftlerin eşitliği tanımına göre, eğer $a \neq b$ ise $(a, b) \neq (b, a)$ olur.

SORU 4

Eşitlik $(3, 4) = (4, 3)$ doğru mudur? Peki, $\{3, 4\} = \{4, 3\}$ eşitliği doğru mudur?

SORU 5

x ve y'yi bulunuz ki aşağıdaki eşitlikler sağlansın:

a) $(5, x) = (5, 3)$ b) $(12, y) = (x, 10)$ c) $(4 + x, 5) = (7, y + 2)$

Kümelerin Kartezyen Çarpımı

ETKİNLİK

Sınıfta her biri 3 sıradan oluşan 2 sıra vardır. Bunları, sıralar kümesi $R = \{I, II\}$ ve sıralardaki sıra numaraları kümesi $K = \{1, 2, 3\}$ olarak gruplandıralım.

Her sıra için bir sıralı çift yazınız; birinci bileşen sıra, ikinci bileşen ise sıra numarası olsun.

Elde edilen sıralı çiftlerden oluşan kümeyi tablo hâlinde yazınız.

ÖRNEK 5

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{x, y\}$ kümeleri verilsin. İlk bileşenleri A kümesinin elemanları, ikinci bileşenleri B kümesinin elemanları olan tüm sıralı çiftleri oluşturalım. Bunlar: (a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y).

Bu sıralı çiftler yeni bir küme tanımlar ve sembolik olarak şöyle yazılır:

$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$, buna A kümesi ile B kümesinin Kartezyen çarpımı denir.

Okunuşu: A çarpı B.

Bir A kümesi ile bir B kümesinin Kartezyen çarpımı, $A \times B$ (okunuşu: A çarpı B) kümesi olarak adlandırılır. Bu küme, birinci bileşeni A'ya, ikinci bileşeni B'ye ait olan tüm sıralı çiftlerden oluşur, yani:

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Eğer A ve B kümelerinden en az biri boş küme ise, tanım gereği Kartezyen çarpım da boş kümedir: $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times B = \varnothing$ ve $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$.

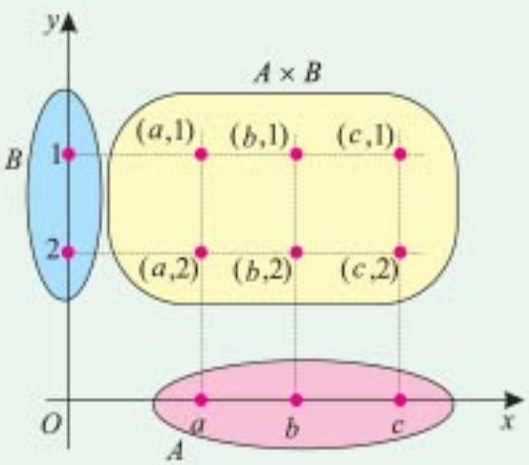
ÖRNEK 6

Eğer $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2\}$ ise,
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$, ve $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

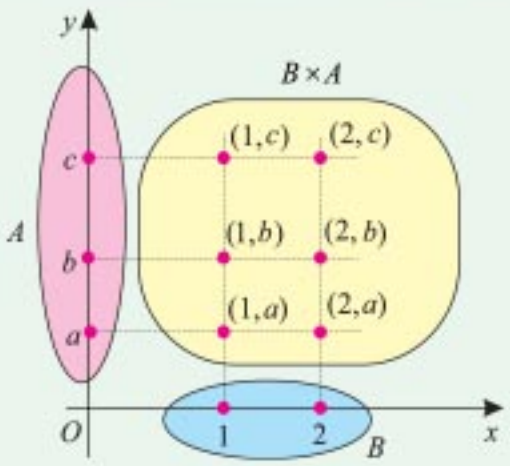
Gördüğümüz gibi $A \times B \neq B \times A$'dır. Buna göre, Kartezyen çarpım işlemi komütatif değildir.

Sıralı çiftler (a, b), iki küme A ve B'nin Kartezyen çarpımının elemanları olarak, apsisi a ve ordinatı b olan koordinat düzlemindeki noktalar şeklinde ele alınabilir. Böylece her sıralı çifte koordinat düzleminde tam olarak bir nokta karşılık gelir. Bu nedenle sıralı çiftlere sıkça "düzlemdeki noktalar" ya da kısaca "noktalar" denir.

Şekil 1 ve Şekil 2'de $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerinin geometrik gösterimi için Kartezyen şema verilmiştir.



Şekil 1



Şekil 2

SORU 6

Tablo halinde aşağıdaki kümeleri yazınız, öyle ki Kartezyen çarpımları şöyledir:

a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ b) $C \times D = \{(2, 5), (9, 5), (2, 7), (9, 3), (2, 3), (9, 7)\}$

ÖRNEK 7

$A = \{x, y\}$ kümesinin kendiyle Kartezyen çarpımı: $A \times A = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$.
Küme $A \times A$'ya sıkça A kümesinin Kartezyen karesi denir ve A^2 ile gösterilir.
Okunuşu: A kare.

Bir A kümesinin Kartezyen karesi, $A^2 = A \times A$ kümesi olarak adlandırılır. Bu küme, A kümesinin elemanlarından oluşan tüm sıralı çiftlerden (x, y) meydana gelir, yani:

$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ve } y \in A\}$

A^2 kümesinin, elemanları (x, x) biçiminde olan ve $x \in A$ koşulunu sağlayan altkümesi, A kümesinin diyagonali olarak adlandırılır. Şöyle yazılır:

$D(A) = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

ÖRNEK 8

$A = \{a, b, c\}$ olsun, o zaman A'nın Kartezyen karesi ve diyagonali için:
$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$, $D(A) = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

SORU 7

$K = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 3 < x < 6\}$ kümesinin Kartezyen karesini yaz.

ETKİNLİK

$A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$. kümeleri verilsin. Aşağıdaki eşitlikler doğru mudur?

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ve $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ve $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ve $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Ne gözlemliyorsun?

Herhangi sonlu A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ Kartezyen çarpımın kesişime göre dağılım yasası;
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ Kartezyen çarpımın birleşime göre dağılım yasası;
$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ Kartezyen çarpımın farka göre dağılım yasası;
$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

ÖRNEK 9

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{a, b\}$ kümeleri verilsin. $A \times B$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

$k(A) = 3$ ve $k(B) = 2$'dir.

$(2, a), (2, b)$ Birinci bileşeni 2 olan tüm sıralı çiftler.

$(4, a), (4, b)$ Birinci bileşeni 4 olan tüm sıralı çiftler.

$(6, a), (6, b)$ Birinci bileşeni 6 olan tüm sıralı çiftler.

$n(A \times B) = k(B) + k(B) + k(B) = k(A) \cdot k(B) = 3 \cdot 2 = 6.$



Herhangi sonlu A ve B kümeleri için şu eşitlik geçerlidir: $k(A \times B) = k(A) \cdot k(B)$.

SORU 8

$M = \{a, b, c\}$ kümesinin Kartezyen karesinin (M^2) eleman sayısını bulun.

SORU 9

Bir öğrenci farklı koşullarda ölçüm yapmak için bir Arduino cihazı programlamaktadır. Elinde üç tip sensör vardır $S = \{$sıcaklık, ses, ışık$\}$ ve iki farklı program $M = \{$program A, program $B\}$.

a) $S \times M$ Kartezyen çarpımını yazınız. Her sıralı çift neyi temsil eder?

b) Bir sensör ile bir programı eşleştirmek için kaç farklı olasılık vardır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Birinci bileşeni en küçük asal sayı, ikinci bileşeni 10'dan küçük asal sayı olan tüm sıralı çiftleri yazınız.

2. Doğal sayılardan oluşan sıralı çiftleri (a, b) yazınız; öyle ki:
   a) $a + b = 6$ b) $a \cdot b = 6$

3. Aşağıdaki eşitliklerin sağlanması için x ve y'yi bulunuz:
   a) $(x + 2, y - 3) = (8, 2)$ b) $(4 \cdot x, 3) = (12, y - 2)$
   c) $(x, x + 1) = (y + 2, 3)$ d) $(x, 2y) = (y - 1, 10)$

4. $M = \{a, b, c\}$ ve $N = \{a, b\}$ kümeleri verilsin. Aşağıdaki kümelerin Kartezyen çarpımını yazınız ve ürünün Kartezyen şemasını çizin:
   a) $M \times N$ b) $N \times M$

5. Kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi olan kümeleri tablo halinde gösterin:
   a) $A \times B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$,
   b) $M \times N = \{(m,1), (n,1), (p,1), (m,3), (n,3), (p,3), (m,5), (n,5), (p,5)\}$.

6. Aşağıdaki kümelerin Kartezyen karesini yazın:
   a) $S = \{2, 4, 6\}$, b) $R = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ ve $6 < x < 9\}$.

7. $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ ve $1 < x < 5\}$ kümesinin karesini ve diyagonalini yazın.
   Daha sonra şu kümeleri belirleyiniz:
   a) $M^2 \setminus D(M)$ b) $M^2 \cup D(M)$ c) $(M^2 \cap D(M)) \setminus D(M))$ d) $(M^2 \setminus D(M)) \cap D(M))$

8. Aşağıdaki kümeler verilsin:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 2 < x < 6\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 3 \leq x < 7\}$ ve $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 4 < x \leq 8\}$.
Aşağıdaki kümeleri yazınız: a) $(B \setminus A) \times C$ b) $(B \cap C) \times A$

9. Bir laboratuvarda, öğrenciler bitkileri farklı ışık koşulları ve gübre türleriyle incelemektedir. Mevcut ışık türleri:
L = {kırmızı ışık, mavi ışık, beyaz ışık} ve gübre türleri:
G = {organik, mineral}.
a) $L \times G$ Kartezyen çarpımını yazın.
b) Her deney 3 gün sürüyorsa, tüm deneyler teker teker yapılırsa bitirmek kaç gün sürecektir?

1.6. Doğal Sayılar

Doğal Sayılar Kümesinde Sıralama

Temel sayı kümesi doğal sayılar kümesidir: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
$\mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesini $\mathbb{N}_0$ ile gösteririz ve buna genişletilmiş doğal sayılar kümesi deriz:
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.

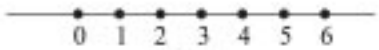
Herhangi iki $m, n \in \mathbb{N}_0$ için yalnızca şu üç ifadeden biri doğrudur: ya $m = n$, ya $m + c = n$ ($c \in \mathbb{N}$ için), ya da $m = n + d$ ($d \in \mathbb{N}$ için).
İkinci durumda $m < n$ deriz, üçüncü durumda $m > n$ deriz. Buna göre doğal sayılar şu şekilde sıralanır:
$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

$n + 1$ sayısı, n sayısının ardılıdır; n sayısı da $n + 1$'in öncelidir.
Her doğal sayının bir tek ardılı vardır; 0'ın önceliği yoktur; diğer her doğal sayının bir tek önceliği vardır.

$\mathbb{N}_0$ kümesini temsil etmenin kullanışlı ve açık bir yolu sayı doğrusu yarı doğrusudur.
Bir doğru p üzerinde, yarı doğruyu belirleyen O ve E noktalarını seçeriz. Başlangıcı O noktasıdır.
OE parçasını sağa doğru ekleyerek sonsuz sayıda nokta elde ederiz (Şekil 1).
O noktasına 0 sayısını, E noktasına 1 sayısını, sağındaki sıradaki noktaya 2 sayısını veririz ve böyle devam eder. Eğer A noktasına n sayısını karşılık verirsek, sağındaki sonraki noktaya onun ardılı $n + 1$'i karşılık veririz.



Şekil 1



Şekil 2

Bu şekilde her doğal sayı yarıdoğru OE üzerindeki bir noktaya karşılık gelir (Şekil 2).
Sayı yarıdoğrusu $\mathbb{N}_0$ kümesinin elemanlarını karşılaştırmak için kullanılabilir.
Bu anlamda, $m < n$ olur, eğer m sayısına karşılık gelen nokta n sayısına karşılık gelen noktanın solunda bulunuyorsa.

SORU 1

Doğal sayıları karşılaştırınız: a) 1 ve 6 b) 8 ve 4 c) 16 ve 22 d) 0 ve 32

Doğal Sayılar Kümesinde İşlemler

ETKİNLİK

a) Ana'nın 8 mavi boya kalemi ve 7 kırmızı boya kalemi vardır. Ana'nın toplam kaç boya kalemi vardır?

b) A ve B, $k(A) = a$ ve $k(B) = b$ olacak şekilde sonlu ayrık iki küme ise, $k(A \cup B)$ kaçtır?

A ve B, $k(A) = a$ ve $k(B) = b$ olacak şekilde sonlu ayrık iki küme olsun.
Doğal sayılar a ve b'nin toplamı, $c = k(A \cup B)$ olacak şekilde doğal sayı c'dir.
$a + b = c$ şeklinde yazarız.
a ve b sayıları toplananlar olarak adlandırılır, yapılan işleme ise toplama denir.

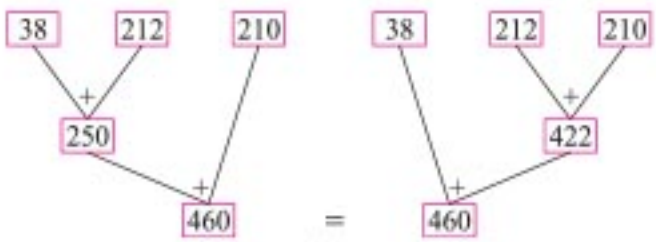
Doğal sayıların toplanması için şu özellikler (yasalar) geçerlidir:

a) Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise, o halde $a + b \in \mathbb{N}$ olur. — Toplamanın kapalılık yasası

b) $a + b = b + a$, her $a, b \in \mathbb{N}$ için. — Toplamanın değişme yasası

c) $(a + b) + c = a + (b + c)$, her $a, b, c \in \mathbb{N}$ için. — Toplamanın birleşme yasası

Değişme yasası, toplamın toplananların sırasına bağlı olmadığını ifade eder. Örneğin: $12 + 7 = 19$ ve $7 + 12 = 19$.
Birleşme yasası, toplamın toplananların gruplanma biçimine bağlı olmadığını ifade eder. Bu durum Şekil 3'te görülebilir. Buna göre, üç veya daha fazla toplananın toplamı her zaman parantezsiz olarak yazılabilir.



Şekil 3

ÖRNEK 1

Doğal sayıların toplamını en basit şekilde hesaplayınız:
a) $147 + 33 + 17 + 503$ b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 19$

a) $147 + 33 + 17 + 503 = (147 + 33) + (17 + 503) = 180 + 520 = 700$

b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = (1 + 19) + (2 + 18) + \ldots + (9 + 11) + 10 = 9 \cdot 20 + 10 = 190$

İki doğal sayı a ve b'nin çarpımı, her biri b'ye eşit olan a tane toplananın toplamı olarak adlandırılır ve ab ile gösterilir: $\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{-toplananlar}} = ab$

a ve b sayıları çarpanlar olarak adlandırılır, yapılan işleme ise çarpma denir.

SORU 2

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kontrol ediniz:

a) $8 \cdot 9 = 9 \cdot 8$ b) $(7 \cdot 4) \cdot 5 = 7 \cdot (4 \cdot 5)$

c) $4 \cdot (3+8) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 8$ d) $(3+8) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 8 \cdot 4$

Doğal sayıların çarpımı için şu özellikler (yasalar) geçerlidir:

a) Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise, o halde $a \cdot b \in \mathbb{N}$ olur. — Çarpmanın kapalılık yasası

b) $a \cdot b = b \cdot a$, her $a, b \in \mathbb{N}$ için. — Çarpmanın değişme yasası

c) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, her $a, b, c \in \mathbb{N}$ için. — Çarpmanın birleşme yasası

d) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, her $a, b, c \in \mathbb{N}$ için. — Çarpmanın toplama üzerine dağılma yasası

ETKİNLİK

$5 + x = 9$ denkleminde bilinmeyen toplananı bulma işlemini açıklayınız.

Bir doğal sayı a ile bir doğal sayı b'nin farkı, b sayısıyla toplandığında a sayısını veren doğal sayı c'dir. $a - b = c$ yazarız, eğer $a = c + b$.

a sayısı eksilen, b sayısı çıkan, yapılan işlem çıkarma olarak adlandırılır.

ÖRNEK 2

Kümeleri tablo halinde yazınız: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 3 < x < 26\}$ ve $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } 2 < x < 8\}$, daha sonra şu kümeyi bulunuz: $C = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \text{ ve } a - 7 = b\}$.

$A = \{4, 5, \ldots, 25\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $C = \{(10, 3), (11, 4), (12, 5), (13, 6), (14, 7)\}$.

ÖRNEK 3

a) Doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemi için kapalılık yasası geçerli değildir. Örneğin, $2 - 3$ bir doğal sayı değildir, çünkü 3 ile toplandığında 2'yi veren hiçbir doğal sayı yoktur.

b) Doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemi için değişme ve birleşme yasaları geçerli değildir.
Örneğin:
$15 - 8$ bir doğal sayıdır, fakat $8 - 15$ bir doğal sayı değildir.
Ayrıca, $15 - (8 - 3) \neq (15 - 8) - 3$.

SORU 3

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kontrol ediniz:

a) $7 \cdot (6 - 2) = 7 \cdot 6 - 7 \cdot 2$ b) $(6 - 2) \cdot 7 = 6 \cdot 7 - 2 \cdot 7$

Eğer a ve b doğal sayılar olup $a - b \in \mathbb{N}$ ise, o zaman her $c \in \mathbb{N}$ için şu eşitlik geçerlidir:
$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c = c \cdot (a - b)$, Çarpmanın çıkarmaya göre dağılım yasası.
Doğal sayıların toplama ve çarpma işlemleri $\mathbb{N}_0$ kümesine şu şekilde genişletilebilir:
$a + 0 = 0 + a = a$ ve $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, her $a \in \mathbb{N}_0$ için.

ETKİNLİK

$x \cdot 32 = 384$ denkleminde bilinmeyen çarpanı bulma işlemini açıkla.

Bir doğal sayı a'nın bir doğal sayı b'ye bölümüne, b sayısıyla çarpıldığında a sayısını veren doğal sayı c denir. $a = b \cdot c$ ise, $a : b = c$ yazarız.
a sayısına **bölünen**, b sayısına **bölen**, yapılan işleme ise **bölme** denir.

ÖRNEK 4

Doğal sayılar kümesinde bölme işlemi için kapalılık yasası geçerli değildir, yani öyle $a, b \in \mathbb{N}$ sayıları vardır ki $a : b \notin \mathbb{N}$ olur.
Örneğin, $2 : 3$ bir doğal sayı değildir, çünkü 3 ile çarpıldığında 2'yi veren hiçbir doğal sayı yoktur.

SORU 4

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kontrol ediniz:

c) $(6 + 2) : 2 = 6 : 2 + 2 : 2$ d) $(6 - 2) : 2 = 6 : 2 - 2 : 2$

Eğer a ve b doğal sayılar olup $a : c, b : c, (a - b) : c \in \mathbb{N}$ ise, o zaman şu eşitlikler geçerlidir:

$(a + b) : c = a : c + b : c$ Bölmenin toplama üzerine sağ dağılım yasası

$(a - b) : c = a : c - b : c$ Bölmenin çıkarma üzerine sağ dağılım yasası,
her $a, b, c \in \mathbb{N}$ için.

SORU 5

Bir test 15 sorudan oluşur. Her doğru çözülen soru için 4 puan verilir, her yanlış çözülen soru için 2 puan çıkarılır. Maya, Marko ve İlir tüm soruları çözmüştür.

a) Maya yalnızca 9 soruyu doğru çözdüyse kaç puan almıştır?

b) Yalnızca 5 soruyu doğru çözen Marko kaç puana sahiptir?

c) İlir 48 puan aldıysa kaç soruyu yanlış çözmüştür?

$\mathbb{N}_0$ Kümesinde Bölünebilme

ETKİNLİK

a) $246 : 6$ b) $182 : 9$ ne kadardır?

$246 : 6 = 41$ bulunur.

182 ise 9'a tam bölünemez, çünkü 9 ile çarpıldığında 182'yi veren hiçbir doğal sayı yoktur.
Diğer taraftan, $182 = 9 \cdot 20 + 2$ olur.



Doğal sayı b, ancak ve ancak öyle bir doğal sayı c varsa ki $a = b \cdot c$, doğal sayı a'nın bölenidir. a sayısının b sayısına bölünebildiğini söyleriz. $b \mid a$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 5

4 sayısı 28'in bölenidir, yani 28 sayısı 4'e bölünebilir, çünkü $28 = 4 \cdot 7$ ve $4 \mid 28$ şeklinde yazarız.

4 sayısı 30'un böleni değildir, çünkü 4 ile çarpıldığında 30'u veren hiçbir doğal sayı yoktur.



Bölünebilme kurallarına göre, bir doğal sayı aşağıdaki şartlarda bölünebilir:

a) 2'ye, ancak ve ancak sonu çift rakamla bitiyorsa;

b) 3'e, ancak ve ancak rakamlarının toplamı 3'e bölünebiliyorsa;

c) 4'e, ancak ve ancak son iki rakamı 4'e bölünebilen bir sayıysa veya 00 ile bitiyorsa;

d) 5'e, ancak ve ancak sonu 0 veya 5 ile bitiyorsa;

e) 9'a, ancak ve ancak rakamlarının toplamı 9'a bölünebiliyorsa;

f) 10'a, ancak ve ancak sonu 0 ile bitiyorsa.

ÖRNEK 6

Bölünebilme kurallarının yardımıyla şunları belirleyebiliriz:

a) 56 sayısı 2'ye bölünebilir, çünkü sonu çift rakamla bitmektedir.

b) 96 sayısı 3'e bölünebilir, çünkü rakamlarının toplamı 3'e bölünebilen bir sayıdır.

c) 524 ve 200 sayıları 4'e bölünebilir. 524 sayısının son iki basamağı 4'e bölünebilen bir sayıdır, 200 sayısının son iki basamağı ise 00'dır.

d) 45 ve 270 sayıları 5'e bölünebilir. 45 sayısı 5 rakamı ile, 270 sayısı ise 0 rakamı ile biter.

e) 620 sayısı 10'a bölünebilir, çünkü 0 ile biter.

Bölme işlemi $\mathbb{N}$ kümesinde kapalı bir işlem olmadığından, kalanlı bölme tanımlanır.



Her $a, b \in \mathbb{N}$ için, $a = bp + q$ ve $0 \leq q < b$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{N}_0$ sayıları tektir.

Sayı p, a'nın b'ye bölünmesinde bölüm, sayı q ise kalan olarak adlandırılır.
Eğer $q = 0$ ise, kalanlı bölme aslında kalansız bölme olur ve buna kalansız bölme denir.

ÖRNEK 7

Her doğal sayı 2'ye bölündüğünde kalan 0 veya 1 olabilir.

Çift sayılar 2'ye bölündüğünde kalan 0'a sahiptir, tek sayılar 2'ye bölündüğünde kalan 1'e sahiptir.

Bu nedenle çift sayılar $2n$ biçiminde yazılabilir, $n \in \mathbb{N}$, tek sayılar $2n - 1$ biçiminde yazılabilir, $n \in \mathbb{N}$.

ÖRNEK 8

Her doğal sayı 5'e bölündüğünde kalan 0, 1, 2, 3 veya 4 olabilir.
Buna göre her doğal sayı $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ ve $5n + 4$ biçiminde yazılabilir, $n \in \mathbb{N}_0$.



Birden büyük olan ve yalnızca 1 ile kendisine bölünebilen doğal sayıya asal sayı denir.
Birden büyük olup asal olmayan doğal sayılara bileşik sayılar denir.

Tanımdan doğrudan çıkarıyoruz ki her asal sayının tam olarak iki böleni vardır, her bileşik sayının ise ikiden fazla böleni vardır.

ÖRNEK 9

11 sayısı asal sayıdır, çünkü bölenleri yalnızca 1 ve 11'dir. 10 sayısı ise bileşik sayıdır, çünkü bölenleri 1, 2, 5 ve 10'dur. 1 sayısı ne asal ne de bileşik sayıdır.

Her bileşik sayı asal sayıların çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Bir sayının asal çarpanlara ayrılması, sayının asal bölenlere ayrıştırılması olarak adlandırılır.

ÖRNEK 10

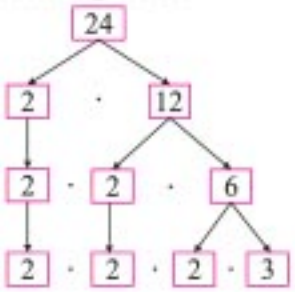
24 sayısı asal çarpanlara ayrılır:

a) dikey tablo ile

24:2=12	24 | 2
12:2=6	12 | 2
6:2=3	6 | 2
3:3=1	3 | 3
	1

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

b) bölen ağacı ile.



SORU 6

Dikey tablo ile aşağıdaki sayıları asal çarpanlara ayır: a) 60, b) 120, c) 153, d) 425

ÖRNEK 11

167 sayısını asal çarpanlara ayır.

Bölünebilme kurallarına göre 167 sayısının 2, 3 ve 5'e bölünemediğini belirleriz. Sonraki asal sayılar 7 ve 11'dir, kontrol edildiğinde 167 bunların hiçbiriyle bölünemez. $167 < 169 = 13 \cdot 13$ olduğundan 167'nin 13'ten büyük böleni olamaz, çünkü o zaman 13'ten küçük asal böleni de olurdu, fakat böyle bir bölen yoktur. Bu nedenle 167 asal sayıdır. Buna göre $167 = 1 \cdot 167$.



Eğer doğal sayı p, karesi p'den büyük olmayan hiçbir asal sayıya bölünemiyorsa, o zaman p asal sayıdır.

ÖRNEK 12

Verilen sayılar: 8, 12 ve 20.

a) Her sayının tüm bölenlerini bul. b) Ortak bölenlerini bul.

Bölen kümeleri: $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ve $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

b) Ortak bölenler kümesi kesişimdir: $D_8 \cap D_{12} \cap D_{20} = \{1, 2, 4\}$.



Ortak bölen, iki veya daha fazla doğal sayının her birine tam olarak bölünebilen her doğal sayıdır.

İki veya daha fazla doğal sayının ortak bölenleri arasındaki en büyük sayıya bu sayıların en büyük ortak böleni (EBOB) denir.

SORU 7

45, 75 ve 165 sayılarının tüm ortak bölenlerini bul.

ÖRNEK 13

OBEB(90, 135, 315)'i bul.

İki veya daha fazla sayının en büyük ortak bölenini belirlemek için sayıları asal çarpanlarına ayırmak gerekir. Ayrıştırmayı dikey bir tablo kullanarak aynı anda yapalım.

90,	135,	315	3
30,	45,	105	3
10,	15,	35	5
2,	3,	7	

OBEB(90, 135, 315) = 3 · 3 · 5 = 45

Mutlaka fark etmişsindir ki, iki veya daha fazla sayı arasındaki ortak bölenlerin en büyüğü, ortak asal çarpanlarının üslerinin çarpımına eşittir; burada her asal çarpan için üs olarak en küçük olanı alınır.

SORU 8

Aşağıdaki sayıların OBEB'ini bul: a) 24 ve 30 b) 30, 105 ve 210 c) 9 ve 16



Eğer a ve b sayıları için OBEB(a, b) = 1 ise, o zaman a ve b sayılarının aralarında asal (ortak böleni olmayan) sayılar olduğunu söyleriz.

SORU 9

Bir mühendisin iki elektrik kablosu vardır; biri 36 metre, diğeri 60 metre uzunluğunda. Verilen kabloların eşit parçalara ayrılabilmesi için mümkün olan en büyük parça uzunluğu kaç metredir?

ÖRNEK 14

Verilen sayılar: 5 ve 15.

a) Her bir sayının katlar kümesini bul.

b) Ortak katlar kümesini bul.

a) Katlar kümeleri şunlardır:

$S_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...\}$ ve $S_{15} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...\}$.

б) Ortak katlar kümesi bu kümelerin kesişimidir: $S_5 \cap S_{15} = \{15, 30, 45, 60, ...\}$.



Doğal sayı a, doğal sayı b'nin bir katı olarak adlandırılır, eğer b, a'yı bölerse; yani $b \mid a$ ise.



İki veya daha fazla doğal sayının **ortak katı**, bu sayıların her biriyle tam bölünebilen her doğal sayıdır. Ortak katlar arasında en küçük olan sayıya ise sayıların **en küçük ortak katı (EKOK) den**

SORU 10

60, 72 ve 90 sayılarının tüm ortak katlarını bul.

ÖRNEK 15

İki veya daha fazla sayının en büyük ortak bölenini belirlemek için, sayıları asal çarpanlarına ayırmak gerekir. Ayrıştırmayı, dikey bir tablo ile aynı anda yapalım.

$$\text{EKOK}(54, 120, 140, 450) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$
$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 37\,800$$

Kesinlikle fark etmişsindir ki, iki veya daha fazla sayının ortak katları arasındaki en küçük sayı, ortak asal çarpanlarının kuvvetlerinin çarpımına eşittir; burada her asal çarpan için üs olarak göstergelerin en büyüğü alınır.

54,	120,	140,	450,	2
27,	60,	70,	225	2
27,	30,	35,	225	2
27,	15,	35,	225	3
9,	5,	35,	75	3
3,	5,	35,	25	3
1,	5,	35,	25	5
	1,	7,	5	5
		7,	1	7
		1,		

SORU 11

Aşağıdaki sayıların EKOK'unu bul: a) 6 ve 12 b) 15 ve 16 c) 9 ve 16

Kuşkusuz fark etmişsindir ki, iki veya daha fazla aralarında asal sayının en küçük ortak katı, onların çarpımına eşittir. Bunun dışında, eğer a sayısı b sayısının bir katı ise, o hâlde $\text{EKOK}(a, b) = a$.

SORU 12

A şehrinden B şehrine giden yol boyunca, direkler birbirinden her 35 metrede bir yerleştirilmiştir. Direkler, aralarındaki uzaklık 50 metre olacak şekilde yeniden yerleştirilecektir. A şehrinden hangi en küçük uzaklıkta eski bir direk yerinden oynatılmayacaktır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki önermeler doğru mudur?
   a) 5 sayısı 12 sayısının öncülüdür. b) 18 sayısı 6 sayısının ardılıdır.
   c) 30 sayısı 29 sayısının öncülüdür. d) 5 sayısı 4'ün ardılıdır.

2. Belirtilen işlemleri en basit yolla yapın:
   a) $234 + 457 + 146 + 473$ b) $13 + 47 + 28 + 62 + 91 + 89$
   c) $1 + 2 + \ldots + 50$ d) $125 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4$

3. Aşağıdaki sayılarda * yerine hangi rakam gelmelidir?
   a) 23469 sayısının 3 ile bölünebilir olması için
   b) 113 sayısının 4 ile bölünebilir olması için

4. Bir sepette 100'den az limon vardır. Bunlar 2, 3 veya 5 küçük sepete eşit olarak paylaştırılabilir, ancak 4 sepete eşit olarak paylaştırılamaz. Sepette kaç limon vardır?

5. Bölünen 170 ve kalan 11 ise, böleni hesaplayın.

6. Sayıları asal çarpanlarına ayırın:
   a) 96 b) 120 c) 231

7. Aşağıdaki sayıların ortak bölenlerini bulun:
   a) 24 ve 36 b) 15 ve 18 c) 240 ve 360 ç) 30, 70 ve 105
   Ardından bu sayıların en büyük ortak bölenini bulun.

8. Küçük bir unlu mamuller fabrikası bir partide 420 perek ve 130 tuzlu kurabiye üretmektedir. Bunları kutulara, her kutuda eşit sayıda perek ve tuzlu kurabiye olacak şekilde paketlemektedir. Her kutuda en çok kaç perek ve kaç tuzlu kurabiye bulunur?

9. Aşağıdaki sayıların en küçük ortak katını bulun:
   a) 6, 10, 12 ve 15 b) 12, 75, 100 ve 240 c) 525 ve 625

10. Çiçekçide 100'den fazla, 250'den az gül vardır. 3, 5 veya 7 gülden oluşan buketler satılmaktadır. Buketler yapılırken hiç gül artmadığına göre, çiçekçide kaç gül vardır?

11. Marko her üçüncü gün yüzmeye gider, her dördüncü gün Çince çalışır ve her on dördüncü gün bisiklete biner. Bugün Marko'nun bu üç etkinliği de varsa, kaç gün sonra üçü yine aynı günde olacaktır?

12. Güney Kutbu'nun üzerinden aynı anda 3 uydu geçmektedir. Birincisi Dünya'nın çevresini 90 dakikada, ikincisi 105 dakikada, üçüncüsü ise 120 dakikada dolaşmaktadır. Üç uydu tekrar Güney Kutbu'nun üzerinde buluşana kadar, birinci uydu Dünya'nın çevresini kaç kez dolaşmış olur?

ARAŞTIRMA

Doğal sayıların sonlu bir dizisindeki asal sayıların belirlenmesi yöntemi Eratosthenes eleği adıyla bilinir.

Sayı 1 ne asal ne de bileşiktir, üzeri çizilir.

Sayı 2 asal sayıdır, onun ardından her çift sayının üzeri çizilir.

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~
11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~

Sayı 3 asal sayıdır, onun ardından her üçüncü sayının (3'e bölünebilen sayı) üzeri çizilir.

İşlem, sonraki her çizilmemiş asal sayı için sürdürülür.

Yukarıdaki yöntemi kullanarak 100'e kadar olan tüm asal sayıları bulun.

ARAŞTIRMA

Almir 150'den küçük bir sayı düşünmüştür. Bu sayı 2'ye bölündüğünde kalan 1, 3'e bölündüğünde kalan 2, 4'e bölündüğünde kalan 3, 5'e bölündüğünde kalan 4, 6'ya bölündüğünde kalan 5, 7'ye bölündüğünde ise kalan 0'dır.

Araştır ve Almir'in düşündüğü sayıyı bul.

1.7. Tam Sayılar ve Tam Sayılarla İşlemler

Tam Sayılar

Çıkarma işlemi her zaman doğal sayılar kümesinde uygulanabilir değildir. Örneğin, 5 – 7 farkı bir doğal sayı değildir. Aynı zamanda, pratikte doğal sayılarla matematiksel olarak ifade edilemeyen durumlarla karşılaşırız.

ETKİNLİK

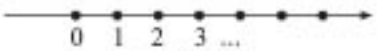
a) Üsküp'te termometredeki cıva, sıfırın altında 10 °C göstermektedir.

b) Mirko 600 denarlık bir hediye almak istemiş, fakat yanında sadece 500 denar varmış. Mirko ailesinden 100 denar borç almış ve hediyeyi satın almış.

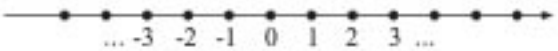
O anda Mirko'nun yanında hiç para kalmamış ve üstelik ailesine 100 denar borçlu olmuş. Üsküp'teki sıcaklığı ve Mirko'nun mali durumunu doğal sayılarla ifade edebilir misin? Bunu hangi sayılarla yapacaksın?

Doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemiyle ilgili sorunu aşmak, ayrıca bazı olayları matematiksel olarak betimlemek için, $\mathbb{N}_0$ kümesini yeni bir kümeye, yani tam sayılar kümesine genişletiyoruz.

Sayı doğrusunda sıfırın sağına doğal sayılar 1, 2, 3, ... yerleştirilir. Bu yönü pozitif yön olarak kabul edeceğiz ve bu yönde yerleştirilen sayılara pozitif tam sayılar diyeceğiz (çizim 1). Bunların pozitif işaretli (+) olduğunu söyleriz.



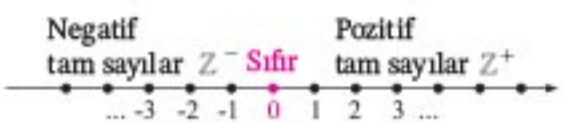
Şekil 1



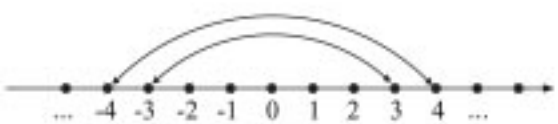
Şekil 2

Karşıt yön sayı doğrusunun **negatif yönü** olarak adlandırılır. Bu yönde, eşit uzunluklar yerleştirilerek negatif tam sayılar −1, −2, −3, ... işlenir (şekil 2).
Bunların negatif işaretli (−) olduğunu söyleriz.

Sıfır sayısı ne pozitif ne de negatif bir tam sayıdır. 0, pozitif sayıları negatif tam sayılardan ayırır (şekil 3).



Şekil 3



Şekil 4

Tüm negatif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$, sayı 0 (sıfır) ve tüm pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$, birlikte tam sayılar kümesini oluşturur. Bu küme $\mathbb{Z}$ ile gösterilir, yani $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

Her bir $\mathbb{Z}$ kümesinin elemanına tam sayı denir.

SORU 1

Hz. İsa'nın doğumundan önceki yıllar "M.Ö. 1. yıl", "M.Ö. 2. yıl" şeklinde sayılır.
Bizim çağımızdan önceki yıllar negatif tam sayılarla, bizim çağımızdaki yıllar ise pozitif tam sayılarla yazılabilir.
Bir sayı doğrusu çiz ve aşağıdaki sayılara karşılık gelen noktaları işaretle:

a) Hz. İsa'nın doğumundan 2 yıl önce

b) Matematikçilerin doğum yılları: Arşimet M.Ö. 287. yıl, Pisagor M.Ö. 570. yıl, René Descartes 1596. yıl ve Leonhard Euler 1707. yıl.

ÖRNEK 1

Sayı doğrusunda şu noktaları göster: -3, 3, -4 ve 4. Ne fark ediyorsun?

Sayılar -3 ile 3, aynı şekilde -4 ile 4, sıfıra göre simetrik olarak yerleşmiştir.
Böyle sayılara zıt sayılar denir.



Her tam sayı a için, b adında tek bir sayı vardır ki, sayılar a ve b birbirinin zıttıdır:

a) eğer $a = c$ ise, o zaman $b = -c$;

b) eğer $a = -c$ ise, o zaman $b = c$;

c) eğer $a = 0$ ise, o zaman $b = 0$.

Yalnızca 0 tam sayısı kendi zıttıdır.

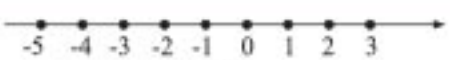
$-(a) = -a$
$-(-a) = a$
$-0 = 0$

SORU 2

Aşağıdaki sayıların her birinin zıt sayısını yaz: 9, 0, $-(+3)$, $-(-7)$.

ÖRNEK 2

3 sayısına karşılık gelen nokta, sıfırdan 3 birim uzaklıktadır; -5 sayısına karşılık gelen nokta ise sıfırdan 5 birim uzaklıktadır (şekil 5). Her tam sayı için onun 0 sayısından ne kadar uzaklıkta olduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 5



Sayı doğrusunda her bir tam sayının a'nın 0'dan olan uzaklığına, tam sayının a mutlak değeri denir ve $|a|$ ile gösterilir.
Tanıma ve önceki örnekteki gözlemlere göre şunu yazabiliriz:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

SORU 3

Hesapla: a) $|-3+5|+|-2\cdot(-3)-11|$ b) $|-x-2|+|3-x|-|5-x|, x$ için $= -20$

Tam sayıların karşılaştırılmasında, doğal sayılardaki aynı kural geçerlidir, yani tam sayı a, tam sayı b'den küçükse ve ancak sayı doğrusunda a sayısı b sayısının solunda bulunuyorsa bunu $a < b$ şeklinde yazarız.
Tam sayılar büyüklüğe göre şu şekilde sıralanabilir:
$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \ldots$

SORU 4

Sayı doğrusunda şu sayıları göster: 0, 2, 3, −7, 9, −8, −2, −10 ve −1. Sonra bunları şu şekilde sırala:
a) artan sıraya göre b) azalan sıraya göre

SORU 5

Bir sayı doğrusu çiz ve tabloda verilen sıcaklık değerlerini işaretle.
Hangi şehir daha soğuktur?
a) Üsküp mü yoksa Manastır mı? b) Berovo mu yoksa Üsküp mü?
c) Manastır mı yoksa Berovo mu? d) Üsküp mü yoksa Strumica mı?

Şehir	Üsküp	Manastır	Berovo	Strumica
Sıcaklık	−1 °C	0 °C	−4 °C	3 °C

Tam Sayılarla İşlemler

ÖRNEK 3

Tam sayıların toplanması için kuralları incele:
a) $(+9)+(+18)=+27$
b) $(-7)+(-25)=-32$
c) $(+4)+(-19)=-15$
ç) $(+26)+(-17)=+9$
d) $(+5)+(-5)=0$
e) $(-7)+0=-7$

Her $a, b \in \mathbb{N}_0$ için geçerlidir:
$(+a)+(+b)=+(a+b)$
$(-a)+(-b)=-(a+b)$
$(+a)+(-b)=-(b-a), a<b$
$(+a)+(-b)=+(a-b), a\geq b$

SORU 6

Toplamları karşılaştır:
a) $17+(-24)$ ve $(-24)+17$ b) $[27+(-14)]+7$ ve $27+[(-14)+7]$



Tam sayıların toplanması için aşağıdaki özellikler (kurallar) geçerlidir:
a) Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise, o halde $a+b \in \mathbb{Z}$ Toplamanın kapanış kuralı
b) $a+b=b+a$, her $a, b \in \mathbb{Z}$ için Toplamanın değişme kuralı
c) $(a+b)+c=a+(b+c)$, her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için Toplamanın birleşme kuralı

SORU 7

Bir şehir içi otobüsün başlangıç durağında 17 yolcu binmiştir.
İlk durakta 10 yolcu binmiş, 3 yolcu inmiştir; ikinci durakta 7 yolcu binmiş, yine 7 yolcu inmiştir; üçüncü durakta 4 yolcu binmiş, 12 yolcu inmiştir. Kaç yolcu yolculuğa devam etmiştir?

Tam sayıların çıkarılması toplama yardımıyla tanımlanır, yani eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise, $a - b = a + (-b)$.
Bu, çıkarma işlemi için tam sayıların toplama kurallarını kullanabileceğimiz anlamına gelir.

ÖRNEK 4

a) $12 - 17 = 12 + (-17) = -5$ b) $(-16 - 14) = (-16) + (-14) = -30$

SORU 8

İşkodra Gölü'nün yüzeyi deniz seviyesinden 6 metre yüksekliktedir ve en büyük derinliği 44 metredir.
Gölün dibi deniz seviyesinden hangi yükseklikte bulunmaktadır?

ÖRNEK 5

Tam sayıların çarpımı için kuralları incele:

a) $(+9) \cdot (+7) = +63$
b) $(-14) \cdot (-27) = +378$
c) $(+102) \cdot (-11) = -1122$
ç) $(-6) \cdot (+39) = -234$
d) $(+5) \cdot (-1) = -5$
e) $(-127) \cdot 0 = 0$

Her $a, b \in \mathbb{N}_0$ için geçerlidir:
$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$
$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$

SORU 9

Hesapla ve karşılaştır:

a) $(+55) \cdot (-42)$ ve $(-42) \cdot (+55)$ b) $[(-42) \cdot (+5)] \cdot (-8)$ ve $(-42) \cdot [(+5) \cdot (-8)]$
c) $[(+146) + (+72)] \cdot (-8)$ ve $[(+146) \cdot (-8)] + [(+72) \cdot (-8)]$



Tam sayıların çarpımı için aşağıdaki özellikler (kurallar) geçerlidir:

a) Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise, o halde $a \cdot b \in \mathbb{Z}$	Çarpmanın kapanış kuralı
b) $a \cdot b = b \cdot a$, her $a, b \in \mathbb{Z}$ için	Çarpmanın değişme kuralı
c) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için	Çarpmanın birleşme kuralı
d) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için	Çarpmanın toplama üzerine dağılma kuralı
e) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ ve $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$, her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için	Çarpmanın çıkarma üzerine dağılma kuralı

SORU 10

Hesapla:

a) $12 \cdot 125 - [(-15) \cdot (-30)]$ b) $(-152) \cdot (-9) - [108 \cdot 125 + (-910) \cdot (-11)]$

SORU 11

Bir donma süreci sırasında, hava sıcaklığı 40 °C'den başlayarak her saat 5 °C düşmektedir. 10 saat sonra sıcaklık kaç °C olacaktır?

ÖRNEK 6

Tam sayıların bölünmesi için kuralları incele:

a) $(+9) : (+3) = +3$

b) $(-14) : (-2) = +7$

c) $(+121) : (-11) = -11$

d) $(-36) : (+9) = -4$

Hera, $b \in \mathbb{N}$ için geçerlidir:

$(+a) : (+b) = +(a : b)$

$(-a) : (-b) = +(a : b)$

$(+a) : (-b) = -(a : b)$

$(-a) : (+b) = -(a : b)$

ÖRNEK 7

Tam sayılar kümesinde bölme işlemi için kapanış yasası geçerli değildir, çünkü bu işlem doğal sayılardaki bölme işlemi üzerinden tanımlanır ve orada da kapanış yasası geçerli değildir.
Örneğin, $2 : (-3) = -(2 : 3)$ bir tam sayı değildir, çünkü $2 : 3$ bir doğal sayı değildir.



Eğer a ve b tam sayılar olup
$a : c, b : c, (a + b) : c \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman bölmenin sağ dağılım yasası geçerlidir:
$(a + b) : c = a : c + b : c$, her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için toplama açısından.

SORU 4

Hesapla:

a) $5 + \{2 - [1 - (-3 + 8)]\}$ b) $\{20 - 3 \cdot [8 + (-4)]\} : [10 + 2 \cdot (-3)]$

c) $\{[50 - (20 + 15)] - 3\} : (-9 + 6)$ d) $\{7 + 2 \cdot [(-12) - (-3)]\} : [2 \cdot 15 : (-6)]$

SORU 12

Bir öğle vaktinde Antarktika'da 0 °C sıcaklık ölçülmüştür. İzleyen 14 saat içinde sıcaklık −42 °C'ye düşmüştür. Bir saat boyunca sıcaklık ortalama ne kadar derece değişmiştir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. A ve B sayılarını karşılaştır, eğer: a) $a = -15$ ve $b = -(-5)$, b) $a = 25$ ve $b = -(-15)$

2. Aşağıdaki ifadelerin doğru olması için yıldız işaretinin (*) yerine hangi rakamlar gelebilir?
   a) $483 < 4*3$, b) $-2*5 > -225$, c) $-7*89 \leq -7589$?

3. Aşağıdaki koşullar sağlandığında tüm tam sayılar kümesini yaz:
   a) $|x| < 2$, b) $|x| = 4$, c) $|x| = 0$, d) $|x| \leq 3$.

4. -52 ve 120 sayılarının toplamını, -52 ile 120 sayılarının farkı ile çarp.

5. -15 ve 25 sayıların toplamının mutlak değerini, -5 ile 5 sayılarının farkının mutlak değerine bölersek hangi sayı elde edilir?

6. Üsküp'te sıcaklık pazartesi günü -5 °C idi ve salı günü 2 °C düştü.
   a) salı günü Üsküp'te sıcaklık kaç °C idi?
   b) çarşamba günü sıcaklık 4 °C yükseldi. Çarşamba günü sıcaklık kaç °C idi?

7. Dünyada ölçülen en düşük sıcaklık -70 °C'dir. Neptün'de bu sıcaklıktan 150 °C daha düşük, Satürn'de Neptün'ünkinden 40 °C daha yüksek, Uranüs'te Satürn'ünkinden 34 °C daha yüksek, Plüton'da Neptün'ünkinden 10 °C daha düşük, Jüpiter'de Satürn'ünkinden 30 °C daha yüksek sıcaklık ölçülmüştür.
   a) Jüpiter, Satürn, Uranüs, Neptün ve Plüton'daki en düşük sıcaklıkları bulun.
   b) Gezegenlerin sıcaklıklarını en düşükten başlayarak sıralayın.

8. Milan 6 ay önce borsaya 70.000 denar yatırmıştır. İlk ayda 3.200 denar kazanç sağlamış, sonraki 2 ay boyunca her ay 2.400 denar zarar etmiş, sonraki 3 ay boyunca ise her ay 2.200 denar kazanç sağlamıştır. Milan'ın 6 aylık borsa işlemleri sonunda kaç parası vardır?

9. Bir asansör, bir maden kuyusunda dakikada 6 metre hızla aşağı inmektedir. Eğer iniş yer seviyesinin 10 metre üzerinden başlıyorsa, -350 metreye ulaşmak için ne kadar süre gerekir?

1.8. Rasyonel Sayılar ve Rasyonel Sayılarla İşlemler

Rasyonel Sayılar

ETKİNLİK

a) Beş arkadaş bir elmayı eşit parçalara bölmelidir. Her bir arkadaş elmanın ne kadarını alacaktır?
b) Eva 4 defter için 30 denar ödemiştir. 1 defter için kaç denar ödemiştir?
Her bir arkadaşın alacağı elma payını ve 1 defterin fiyatını tam sayılarla ifade edebilir misin? Bunu hangi sayılarla yapabilirsin?

Gördük ki, bölme işlemi her zaman tam sayılar kümesinde uygulanabilir değildir. Bunun sonucu olarak, günlük yaşamda tam sayılarla ifade edilemeyen durumlar vardır ve bu nedenle tam sayılar kümesinin, rasyonel sayılar kümesi adı verilen yeni bir sayı kümesiyle genişletilmesine ihtiyaç duyulur.

$\frac{a}{b}$ biçimindeki ifade, burada a ve b tam sayılar olup $b \neq 0$, *kesir* olarak adlandırılır.

Sayı a'ya pay, sayı b'ye payda ve "–" işaretine kesir çizgisi denir.
İki kesir $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ için, ancak ve ancak $a \cdot d = b \cdot c$ olduğunda bu iki kesir eşittir denir.
Her bir a/b kesri, a'nın b'ye bölünmesi olarak düşünüldüğünde, rasyonel sayı adı verilen yeni bir sayıyı temsil eder. Bu durumda eşit kesirler aynı rasyonel sayıyı ifade eder. Tüm rasyonel sayılar kümesi şu şekilde tanımlanır: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0\right.$ ve bu kümeye rasyonel sayılar kümesi denir. Rasyonel sayılar kümesi, negatif rasyonel sayılar kümesi, sıfır ve pozitif rasyonel sayılar kümesinin birleşimidir: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ Burada, $\mathbb{Q}^- = \left\{\frac{-a}{b} | a, b \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}\right\}$.

ÖRNEK 1

Her tam sayı a bir kesir olarak yazılabilir.
a) $4 = \frac{4}{1}$ veya $4 = \frac{8}{2}$ b) $-5 = \frac{-5}{1}$ veya $-5 = \frac{-15}{3}$

Her tam sayı a, paydası 1 olan bir kesir olarak yazılabilir, yani $a = \frac{a}{1}$.

Eğer bir kesrin payı ve paydası sıfırdan farklı aynı bir sayı ile çarpılırsa, verilen kesire eşit bir kesir elde edilir, yani: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $c \neq 0$ için.
Bu işleme kesri genişletme denir.

ÖRNEK 2

Kesri genişletme örneği: $\frac{4}{7}$ kesrini genişletelim.

a) $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{16}{28}$ b) $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{28}{49}$

Eğer bir kesrin payı ve paydası sıfırdan farklı aynı bir sayıya bölünürse, verilen kesire eşit bir kesir elde edilir, yani: $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $c \neq 0$ için.
Bu işleme kesri sadeleştirme denir.

ÖRNEK 3

Aşağıdaki kesirler sadeleştirilebilir mi? a) $\frac{8}{10}$ b) $\frac{6}{25}$

a) $\frac{8}{10} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$ Pay ve payda asal çarpanlarına ayrılır. Ortak bölen 2 hem paydan hem paydadan çıkarılır.

b) $\frac{6}{25} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5}$ OBEB (6, 25) = 1 olduğundan bu kesir sadeleştirilemez.

Eğer bir kesrin payı ve paydası aralarında asal sayılar ise, yani OBEB $(a, b) = 1$, $\frac{a}{b}$ kesrine **sadeleştirilemez kesir** denir.

Kesri genişletme ve sadeleştirme özelliğinden, iki kesrin ancak ve ancak biri diğerinden genişletme veya sadeleştirme yoluyla elde ediliyorsa eşit oldukları sonucuna varabiliriz.

ÖRNEK 4

Kesirleri ortak paydada yazınız: $\frac{3}{4}, \frac{1}{6}$ ve $\frac{8}{3}$.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ Paydaların EBOB'unu buluyoruz: EKOK(4, 6, 3) = 12

$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$ Ekok'u her kesrin paydasına bölüyoruz.

$\frac{8}{3} = \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{32}{12}$ Bulunan oranlarla her kesri genişletiyoruz.

SORU 1

Kesirleri en küçük ortak paydada yazınız:

a) $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ b) $\frac{3}{20}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}$ c) $\frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{3}{10}$

İki kesir $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{b}$ eşit pozitif paydalara sahipse, payı küçük olan küçüktür, yani $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ ancak ve ancak $a < c$ olduğunda.

Paydaları farklı olan kesirleri karşılaştırmak için önce onları eşit paydalara çevirirız, sonra eşit paydalı kesirler gibi karşılaştırırız.

SORU 2

Atlantik Okyanusu, Dünya'nın toplam su yüzeyinin $\frac{3}{10}$'unu, Pasifik Okyanusu ise $\frac{9}{20}$'sini kaplamaktadır. Dünya'nın su yüzeyinin daha küçük kısmını hangisi kaplamaktadır?

ÖRNEK 5

Sayı doğrusunda birkaç rasyonel sayı gösterilmiştir (şekil 1).



Şekil 1

İki gerçek sayı a ve b sayı doğrusunda gösterildiğinde, a sayısı b sayısının solunda bulunuyorsa, a sayısı b'den küçüktür.

SORU 3

a) Aşağıdaki rasyonel sayıları sayı doğrusunda gösteriniz: $-4\frac{1}{2}, 3, -\frac{5}{2}, 2\frac{1}{4}$ ve $-\frac{1}{3}$.

b) Sayı doğrusundan yararlanarak a) şıkkındaki sayıları en küçükten başlayarak artan sırada yazınız.

Rasyonel Sayılarla İşlemler

ETKİNLİK

İlina ve İlir birlikte pastanın ne kadarını yemiştir, nasıl hesaplayacaksın?

a) İlina pastanın $\frac{1}{8}$'ini, İlir ise $\frac{2}{8}$'ini yemiştir.

b) İlina pastanın $\frac{2}{7}$'sini, İlir ise $\frac{1}{6}$'sını yemiştir.

ÖRNEK 6

Kesirleri toplayınız: a) $\frac{3}{7}$ ve $\frac{6}{7}$ b) $\frac{13}{8}$ ve $\frac{4}{5}$

a) $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$ b) $\frac{13}{8}+\frac{4}{5}=\frac{13\cdot 5+8\cdot 4}{8\cdot 5}=\frac{97}{40}=2\frac{17}{40}$

İki kesrin paydaları eşit olduğunda, paylar toplanarak elde edilen sonuç paya yazılır, payda ise aynı kalır. Yani:

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $c \neq 0$.

İki kesrin paydaları farklı olduğunda, önce paydalar eşitlenir, ardından eşit paydalı kesirlerde olduğu gibi toplanır. Yani:

$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $c, d \neq 0$.

ÖRNEK 7

Hesaplayınız: a) $\frac{3}{4}+0$ b) $0+\frac{-7}{8}$ c) $\frac{15}{16}+\frac{-15}{16}$

a) $\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}+\frac{0}{4}=\frac{3+0}{4}=\frac{3}{4}$ b) $0+\frac{-7}{8}=\frac{0}{8}+\frac{-7}{8}=\frac{0-7}{8}=-\frac{7}{8}$

c) $\frac{15}{16}+\frac{-15}{16}=\frac{15+(-15)}{16}=\frac{0}{16}=0$

SORU 4

Eşitliğin doğruluğunu kontrol ediniz: a) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$

Rasyonel sayılarla toplama işlemi kapalı, değişmeli ve birleşmelidir.

SORU 5

Bir üçgenin çevresini hesaplayınız; eğer kenarlarının uzunlukları $3\frac{1}{2}$ cm, $2\frac{2}{3}$ cm ve $4\frac{5}{6}$ cm ise.

ETKİNLİK

Bir tiyatro gösterisi için koltukların $\frac{5}{6}$'sı için bilet satılmıştır. Ancak kötü hava koşulları nedeniyle yalnızca $\frac{3}{4}$'ü doldurulmuştur.

Satılan biletlerin karşılık geldiği koltuklardan kaçta kaçının boş kaldığını nasıl hesaplayacaksın?

ÖRNEK 8

Farkı hesapla: a) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}$ b) $2\frac{3}{4} - 7$

a) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$ b) $2\frac{3}{4} - 7 = \frac{11}{4} - \frac{7}{1} = \frac{11 \cdot 1 - 4 \cdot 7}{4 \cdot 1} = \frac{-17}{4} = -4\frac{1}{4}$

İki kesrin paydaları eşit olduğunda, çıkarma işlemi yapılırken birincinin payından ikincinin payı çıkarılır, sonuç paya yazılır ve payda aynı kalır. Yani:

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $c \neq 0$.

İki kesrin paydaları farklı olduğunda, önce paydalar eşitlenir, ardından eşit paydalı kesirlerde olduğu gibi çıkarma yapılır. Yani:

$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $c, d \neq 0$.

SORU 6

Anyika kitabı 3 günde okumuştur. İlk gün kitabın $\frac{3}{5}$'ini okumuştur. İkinci gün, birinci günden $\frac{3}{10}$ daha az okumuştur. Üçüncü gün kitabın ne kadarını okumuştur?

ETKİNLİK

Merita markete gitmiş ve yanında birikiminin $\frac{3}{4}$'ünü almıştır. Aldığı paranın $\frac{4}{5}$'ini yiyeceklere harcamıştır. Birikiminin ne kadarını yiyeceklere harcadığını nasıl hesaplayacaksın?

ÖRNEK 7

Çarpımı hesapla: a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$ b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{4}$.

a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{56}$ b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{4} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 4} = \frac{30}{28} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$

İki kesrin çarpımı, çarpanların paylarının çarpımının paya, paydalarının çarpımının ise paydaya yazılmasıyla elde edilir:

$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $c, d \neq 0$.

ÖRNEK 8

Çarpımı hesapla: a) $\frac{3}{8} \cdot 1$ b) $\frac{4}{9} \cdot 0$ c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$

a) $\frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{3}{8}$

b) $\frac{4}{9} \cdot 0 = \frac{4}{9} \cdot \frac{0}{1} = \frac{4 \cdot 0}{9 \cdot 1} = \frac{0}{9} = 0$

c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{20}{20} = 1$

Kesirler $\frac{4}{5}$ ve $\frac{5}{4}$ birbirinin tersidir (karşılıklı kesirlerdir).

SORU 7

Eşitliğin doğruluğunu kontrol ediniz:

a) $\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$

d) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Rasyonel sayılarla çarpma işlemi kapalı, değişmeli, birleşmeli olup toplama ve çıkarma işlemlerine göre de dağılımlıdır.

SORU 8

Osman, $3\frac{1}{4}$ m ve $4\frac{2}{3}$ m ölçülerindeki odası için kaç metrekare parke satın almalıdır?

ETKİNLİK

Bir şişe $\frac{3}{4}$ litre su almaktadır.

$8\frac{1}{4}$ litre su ile kaç böyle şişe doldurulabileceğini nasıl hesaplarsın?

ÖRNEK 9

Bölümü hesaplayınız: a) $\frac{3}{4} : \frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{6} : \frac{25}{36}$.

a) $\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{7} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 7} = \frac{27}{28}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{25}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{36}{25} = \frac{5 \cdot 36}{6 \cdot 25} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

İki kesrin bölümü, bölenin tersinin (karşıt kesrinin) bölünenle çarpımına eşittir. Yani:

$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $b, c, d \neq 0$.

SORU 10

Hesaplayınız: a) $\left\{3 - \left[4\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right)\right]\right\} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$ b) $3 - \left\{\frac{1}{4} - \left(-4\frac{4}{9}\right)\left[(-2) - \frac{5}{6} : \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right)\right]\right\}$

İşlemlerin gerçekleştirilme sırasını açıkla.

SORU 11

Bir takım elbise için terzi $3\frac{1}{4}$ m kumaş harcamaktadır. $22\frac{3}{4}$ m kumaş ile kaç takım elbise dikebilir?

ÖRNEK 10

Bölümü bileşik kesir (çifte kesir) şeklinde yazı: a) $\frac{3}{4} : 5$ b) $4 : \frac{2}{3}$ c) $1\frac{3}{7} : \frac{4}{5}$

a) $\frac{3}{4} : 5 = \frac{\frac{3}{4}}{5}$ b) $4 : \frac{2}{3} = \frac{4}{\frac{2}{3}}$ c) $1\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{1\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{4}{5}}$

Rasyonel Sayıların Ondalık Gösterimi

ETKİNLİK

Kesirler $\frac{91}{10}$, $\frac{127}{100}$ ve $\frac{3009}{1000}$ ondalık kesirlere örnektir.
Bu kesirlerin paydasız olarak yazılma işlemini açıklayınız:

$\frac{91}{10} = \frac{90+1}{10} = \frac{90}{10} + \frac{1}{10} = 9 + \frac{1}{10} = 9{,}1$

$\frac{127}{100} = \frac{100+27}{100} = \frac{100}{100} + \frac{27}{100} = 1 + \frac{27}{100} = 1{,}27$

$\frac{3009}{1000} = \frac{3000+9}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{9}{1000} = 3 + \frac{9}{1000} = 3{,}009$

Elde edilen bu gösterimlere ne ad veriyoruz?



Eğer bir tam sayının sağına virgül konulup onun ardına sonlu (ya da sonsuz) sayıda rakam yazılırsa, bu gösterime sonlu (ya da sonsuz) ondalık sayı denir. Bu tür gösterimlere genel olarak **ondalık sayılar** adı verilir.

Her ondalık sayı, virgül ile ayrılan iki kısımdan oluşur: virgülden önceki **tam kısım** ve virgülden sonraki **ondalık kısım**. Ondalık kısmın basamakları **ondalık basamaklar**, bu basamaklardaki rakamlar ise **ondalıklar** olarak adlandırılır.
Her rasyonel sayı (kesir) bir ondalık sayı olarak yazılabilir.

ÖRNEK 11

Kesri ondalık sayı olarak yazın: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{20}$

a) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ b) $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ c) $\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{45}{100} = 0{,}45$

Bir kesir, payın paydaya bölünmesiyle ondalık sayı olarak yazılabilir.

ÖRNEK 12

Kesri, bölme işlemiyle ondalık sayı olarak yazın: a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{22}$

a) $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$

b) $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333...$

c) $\frac{7}{22} = 7 : 22 = 0{,}31818...$

Bölme işlemi sona erdiğinde sonlu ondalık sayı elde edilir.

Bölme işlemi sona ermediğinde sonsuz dönemli ondalık sayı elde edilir.

Sonsuz ondalık sayı ki hemen ondalık virgülden sonra bir rakam veya sonlu bir rakam dizisi aynı sırayla tekrarlanır, saf dönemli ondalık sayı olarak adlandırılır.

Sonsuz ondalık sayı ki birkaç sıfırdan farklı ondalık basamaktan sonra bir rakam veya sonlu bir rakam dizisi aynı sırayla tekrarlanır, karma dönemli ondalık sayı olarak adlandırılır.
Tekrarlanan rakam dizisi ondalık sayının dönemi olarak adlandırılır.

ÖRNEK 13

a) Sayı 2,6666... saf dönemli ondalık sayıdır ve 2,(6) şeklinde yazılır.

b) Sayı 4,12323... karma dönemli ondalık sayıdır ve 4,1(23) şeklinde yazılır.

Her sonlu veya sonsuz dönemli ondalık sayı bir rasyonel sayı (kesir) olarak yazılabilir.

ÖRNEK 14

a) Sayı 0,(18) aşağıdaki şekilde kesir olarak yazılabilir:

$$0,(18) = x$$
$$0,(18) \cdot 10^2 = x \cdot 10^2$$
$$18,(18) = x \cdot 10^2$$
$$18 + 0,(18) = x \cdot 10^2$$
$$18 + x = x \cdot 10^2$$
$$18 = x \cdot 10^2 - x$$
$$18 = x(10^2 - 1)$$
$$x = \frac{18}{10^2 - 1} = \frac{18}{100 - 1} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

b) Sayı 0,24(36) aşağıdaki şekilde kesir olarak yazılabilir:

$$0,24(36) = x$$
$$0,24(36) \cdot 10^2 = x \cdot 10^2$$
$$24,(36) = x \cdot 10^2$$
$$24 + 0,(36) = x \cdot 10^2$$
$$24 + \frac{36}{10^2 - 1} = x \cdot 10^2$$
$$24(10^2 - 1) + 36 = x \cdot 10^2(10^2 - 1)$$
$$x = \frac{2412}{(10^2 - 1) \cdot 100} = \frac{2412}{9900} = \frac{67}{275}$$

ÖRNEK 15

Sayıları karşılaştırınız: a) 5,63 ve 3,63 b) 3,8764 ve 3,8774 c) −5,3712 ve −5,3743

a) İki ondalık sayı pozitif olduğunda, önce tam kısımları karşılaştırılır. Eğer tam kısımlar aynı değilse, tam kısmı daha büyük olan sayı büyüktür.
$5{,}63 > 3{,}63$ çünkü $5 > 3$.

b) Eğer tam kısımları aynı ise, ondalıklar karşılaştırılır; önce onda birler, sonra yüzde birler vb.
$3{,}8764 < 3{,}8774$ çünkü üçüncü ondalık basamakta $6 < 7$.

c) İki negatif ondalık sayı karşılaştırıldığında, mutlak değeri daha küçük olan sayı daha büyüktür.
$-5{,}3712 > -5{,}3743$ çünkü $|-5{,}3712| < |-5{,}3743|$.

Ondalık Sayılarla İşlemler

ETKİNLİK

Belirtilen işlemleri yapınız: a) $238 + 56$ b) $769 - 79$ c) $56 \cdot 125$ d) $873 : 32$

ÖRNEK 16

Ondalık sayıların toplamını ve farkını hesaplayınız: a) $2{,}35 + 3{,}9$ b) $17{,}2 - 11{,}36$

a)
$$\begin{array}{r} 2{,}35 \\ +\ 3{,}9 \\ \hline 6{,}25 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 17{,}2 \\ -\ 11{,}36 \\ \hline 5{,}84 \end{array}$$

Toplama ve çıkarma işlemleri en sağdaki basamaktan başlanarak yapılır.
Ondalık virgül aynı düşey hizada bulunmalıdır.

SORU 12

Hesaplayınız: a) $23{,}7 - 35 + 0{,}353$ b) $3{,}235 - 6{,}55 - 4{,}6783$

ÖRNEK 17

Ondalık sayıların çarpımını ve bölümünü hesaplayınız: a) $2{,}7 \cdot 3{,}47$ b) $6{,}342 : 0{,}25$

a)
$$\begin{array}{r} 27 \cdot 347 \\ 189 \\ 108 \\ +\ 81 \\ \hline 9369 \end{array}$$

$2{,}7 \cdot 3{,}47 = 9{,}369$

Ondalık sayılar doğal sayılar gibi çarpılır.
Çarpımda, çarpanlardaki ondalık basamakların toplamı kadar basamak, sonuçta sağdan sola ayrılır.

b) $6{,}342 : 0{,}25 = 634{,}2 : 25 = 25{,}368$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \hline 134 \\ 125 \\ \hline 92 \\ 75 \\ \hline 170 \\ 150 \\ \hline 200 \\ 200 \\ \hline 0 \end{array}$$

Bölme işlemine başlamadan önce bölen ve bölünen 10'un uygun kuvveti ile çarpılarak bölen tam sayı yapılır:
Daha sonra bölme işlemi doğal sayılarda olduğu gibi yapılır.

SORU 13

Hesaplayınız: a) $9{,}758 : 3{,}4 - 2{,}08 : 4$ b) $(5{,}6 - 1{,}8 : 3) \cdot 0{,}08$

SORU 14

Bir dikdörtgenin alanı 4,88 metrekare, kenarlarından birinin uzunluğu 1,6 metredir. Kaçtır:
a) diğer kenarın uzunluğu
b) dikdörtgenin çevresi?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kesirleri aynı paydada gösterin: a) $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ ve $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}, 3\frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{9}$

2. Kesirleri en küçükten başlayarak sıralayın:
   a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ ve $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12}$ ve $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 3\frac{5}{6}$ ve $-1\frac{7}{12}$.
   Daha sonra bunları sayı doğrusunda gösterin.

3. Lina maraton parkurunun $\frac{3}{4}$'ünü koşmuştur, Admir parkurun $\frac{5}{7}$'sini koşmuştur, Simon ise parkurun $\frac{8}{9}$'unu koşmuştur. Parkurun en büyük kısmını kim koşmuştur, en küçük kısmını kim koşmuştur?

4. Hesaplayın: a) $\frac{13}{4} - 2\frac{5}{6} + 2\frac{1}{9} - 1$ b) $\left(\frac{3}{4} - 2\frac{1}{7}\right) \cdot \left(3\frac{1}{4} - 1\right)$ c) $\left(3\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4}\right) : \frac{7}{12}$

5. Hesaplayın: a) $\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{12}\right)$ b) $\dfrac{\frac{5}{6} + \frac{3}{4}}{\frac{7}{8} - \frac{1}{12}}$ c) $\dfrac{\frac{5}{21} - \frac{17}{21} : \frac{34}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{8}{7} - \frac{7}{2} + \frac{8}{21} \cdot \frac{9}{4}}$

6. Bir havuz bir muslukla 8 saatte, diğer muslukla 12 saatte dolmaktadır. Her iki musluk birlikte açıldığında 2 saatte havuzun ne kadarı dolar?

7. Kesri ondalık sayı olarak yazın: a) $\frac{13}{8}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{11}{25}$ d) $\frac{3}{7}$

8. Sayıyı sadeleştirilemeyen bir kesir olarak yazın: a) 0,34 b) 0,02 c) 4,125 d) 1,25

9. Sayıyı kesir olarak yazın: a) 0,(7) b) 3,(51) c) 1,3(4) d) 5,24(3)

10. Hesaplayın: a) $14{,}16 \cdot 3{,}7 - 12{,}24 : 3{,}3 + 5{,}8$ b) $4{,}2 : 3{,}5 \cdot 2{,}6 - (5{,}4 : 0{,}02) : 0{,}6$

11. Dünya ile Mars arasındaki uzaklık yaklaşık 225,3 milyon kilometre, Dünya ile Venüs arasındaki uzaklık ise 108,2 milyon kilometredir.
    a) Hangi gezegen Dünya'dan daha uzaktadır?
    b) Dünya ile Mars arasındaki uzaklık ile Dünya ile Venüs arasındaki uzaklık arasındaki fark kaçtır?

1.9. Gerçek Sayılar ve Gerçek Doğru Üzerindeki Aralıklar

Gerçek Sayılar

ETKİNLİK

a) Ondalık sayı −0,75'i kesir biçiminde yazın.

b) Kesirleri ondalık sayı biçiminde yazın: $\frac{3}{4}$ ve $\frac{11}{45}$.

Gördük ki her sonlu ve her sonsuz dönemli sayı bir kesir, yani bir rasyonel sayı olarak yazılabilir.

ÖRNEK 1

Bir ikizkenar dik üçgende, dik kenarı $a = 1$ cm olan hipotenüsün uzunluğunu hesaplayın.

Hipotenüsün uzunluğu: $c = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}$ cm. Pythagoras teoremi uygulanır.

Yukarıdaki örnekte $\sqrt{2}$ sayısıyla karşılaştık. Eğer değerini hesap makinesiyle hesaplarsak, $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ elde ederiz.
Eğer $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı olsaydı, örneğin $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (OBEB$(a, b) = 1$) şeklinde, o zaman $a^2 = 2b^2$ olurdu. Bu durumda a çift sayı olmak zorundadır, $a = 2a_1$. Böylece $4a_1^2 = 2b^2$, yani $2a_1^2 = b^2$ olur ve b de çift sayı olmak zorunda kalır. Bu, a ve b'nin aralarında asal olduğu varsayımıyla çelişir. Dolayısıyla $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı değildir.

Sonsuz, dönemsiz ondalık sayılar irrasyonel sayılar olarak adlandırılır. Bunlar I kümesi ile gösterilen irrasyonel sayılar kümesini oluşturur.

ÖRNEK 2

a) Sayılar $\sqrt{3}$ ve $-\sqrt{5}$ irrasyonel sayılara örnektir.

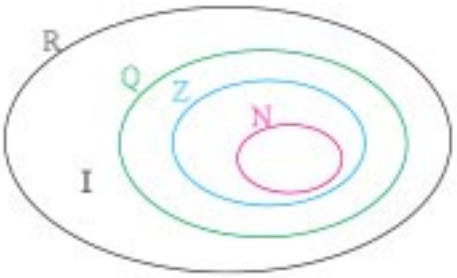
b) İrrasyonel sayılar yalnızca köklü ifadelerle ortaya çıkmaz. Sayılar $\frac{1}{\pi}$, π, π^2, π^3, 1,323323332..., 2,070070007... da irrasyonel sayılardır.

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesi birlikte gerçek sayılar kümesini oluşturur, yani:
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

SORU 1

Şekil 1'de Venn diyagramı ile kümeler gösterilmiştir: N, Z, Q, I ve R. Aşağıdaki ifadeler doğru mudur?

a) $N \subset Z$ b) $Z \subset Q$ c) $Q \cap I = \emptyset$
d) $Q \cup I = R$ e) $Q \cup Z = R$ f) $N \subset Q$
g) $Z \subset Q$ h) $N \subset R$ i) $Z \subset R$
j) $Q \subset R$ k) $R \setminus Q = Z$ l) $I \subset R$



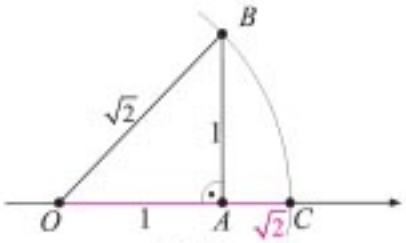
Şekil 1

Sayı doğrusunun her bir noktasına tam olarak bir gerçek sayı karşılık getirilebilir ve tersine, her gerçek sayıya yalnızca sayı doğrusunun bir noktası karşılık getirilebilir. Başka bir deyişle, sayı doğrusundaki noktalar ile gerçek sayılar kümesi arasında bire bir ve tersine çevrilebilir bir bağıntı vardır. Bu sebeplerden dolayı, sayı doğrusu **gerçek doğru** olarak adlandırılır.

ÖRNEK 3

Gerçek doğru üzerinde $\sqrt{2}$ sayısına karşılık gelen noktayı belirleyiniz.

İkizkenar dik üçgen OAB'yi, dik kenarları $\overline{OA} = \overline{AB} = 1$ olacak şekilde kurarız. O hâlde, hipotenüsü için $\overline{OB} = \sqrt{2}$ olur (Şekil 1). Bu uzunluğu sayı doğrusu üzerine aktardığımızda, $\sqrt{2}$ sayısına karşılık gelen C noktasını elde ederiz.



Şekil 2

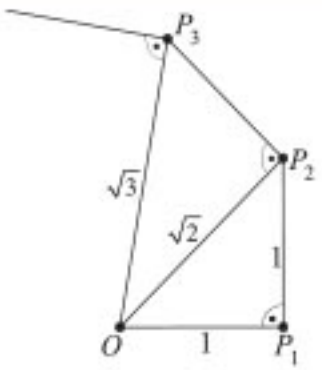
ETKİNLİK

Geniş bir kâğıt al ve aşağıdaki şekilde **"karekökler sarmalını"** oluştur:

- ✓ O noktasını işaretle ve bir birim uzunluğunda OR_1 parçasını çiz.
- ✓ OR_1 parçasına dik olacak şekilde, bir birim uzunluğunda R_1R_2 parçasını çiz.
- ✓ OR_2 parçasına dik olacak şekilde, bir birim uzunluğunda R_2R_3 parçasını çiz.
- ✓ OR_3 parçasına dik olacak şekilde, bir birim uzunluğunda R_3R_4 parçasını çiz.

Bu şekilde devam ederek uzunlukları $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ ... vb. olan parçaları elde ederiz (Şekil 3).

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{4}$ uzunluklarını sayı doğrusu üzerine yerleştirin.



Şekil 3

SORU 2

Gerçek doğru üzerinde $\sqrt{5}$ ve $-\sqrt{5}$ sayılarını gösterin.

ÖRNEK 4

Aşağıdaki sayıları karşılaştırın: a) $\sqrt{2}$ ve $\frac{7}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ve $\sqrt{2}$

a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$ ve $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}118$ ve $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$

$\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{2}$

Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemleri, rasyonel sayılar kümesindeki toplama ve çarpma işlemleriyle uyumlu olarak tanımlanmıştır ve rasyonel sayılar kümesindekiyle aynı özelliklere sahiptir.

ÖRNEK 5

Belirtilen işlemleri gerçekleştirin: a) $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$ b) $6\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}$

a) $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2}+\sqrt{2})+(5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

b) $6\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 6\cdot 2\cdot \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 12\cdot 5 = 60$

Gerçek sayının mutlak değeri, tıpkı tam sayının mutlak değeri gibi tanımlanır.
Yani her gerçek sayı a için:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eğer } a \geq 0 \text{ ise} \\ -a, & \text{eğer } a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Geometrik olarak, gerçek sayının mutlak değeri, a sayısının 0 sayısından olan uzaklığına eşittir.
Sayı doğrusundaki iki nokta arasındaki uzaklık her zaman negatif olmayan bir sayı olduğundan, gerçek sayının mutlak değeri daima negatif olmayan bir sayıdır.

ÖRNEK 6

Hesaplayınız: a) $|-\sqrt{5}|$ b) $|\pi|$ c) $\left|-\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\right|$ d) $\left|\frac{\sqrt{11}}{-\pi\sqrt{3}}\right|$

a) $|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$ b) $|\pi| = \pi$

c) $\left|-\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ d) $\left|\frac{\sqrt{11}}{-\pi\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{11}}{\pi\sqrt{3}}$

SORU 3

$a = -1$ ve $b = 1{,}5$ olsun. Aşağıdakinin doğru olup olmadığını kontrol edin:

a) $a \leq |a|$ b) $|a-b| = |b-a|$

c) $|a+b| \leq |a|+|b|$ d) $|a-b| \geq |a|-|b|$

e) $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$ f) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Gerçek Sayılarla Yaklaşık Hesaplamalar

İrrasyonel sayılar, sonu gelmeyen ve periyodik olmayan ondalık sayılardır; bu nedenle onları tam olarak yazmamız mümkün değildir. Bu sebeple, çoğunlukla irrasyonel sayıları eksik ya da fazla olacak şekilde yaklaşık rasyonel sayılarla ifade ederiz.

ÖRNEK 7

$\sqrt{2}$ sayısının değerini üç ondalık basamağa kadar bulun.

Tahmin ediyoruz:	Karekök alıyoruz:	Yaklaşık rasyonel sayı ile değiştiriyoruz:
$1^2 < 2 < 2^2$	$1 < \sqrt{2} < 2$	$\sqrt{2} \approx 1$ (bir tam sayıya kadar eksik), $\sqrt{2} \approx 2$ (bir tam sayıya kadar fazla),
$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$ (bir ondalığa kadar eksik), $\sqrt{2} \approx 1{,}5$ (bir ondalığa kadar fazla),
$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$	$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ (iki ondalığa kadar eksik), $\sqrt{2} \approx 1{,}42$ (iki ondalığa kadar fazla),
$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$	$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	$\sqrt{2} \approx 1{,}414$ (üç ondalığa kadar eksik), $\sqrt{2} \approx 1{,}415$ (üç ondalığa kadar fazla).

Tanımlanan, irrasyonel bir sayının yaklaşık değerini bulma yöntemi **"tahmin et ve dene"** olarak adlandırılır.

SORU 4

$\sqrt{11}$ sayısının değerini iki ondalığa kadar bulunuz ve ardından hesaplamanızı hesap makinesi ile kontrol edin.

ÖRNEK 8

Sayısal ifadeler $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{3}$, $3\cdot\sqrt{2}$ ve $\frac{5}{\sqrt{3}}$ irrasyonel sayıları temsil ettikleri için irrasyonel ifadelere örnektirler. İrrasyonel ifadelerin yaklaşık değerlerini, irrasyonel sayıları uygun yaklaşık rasyonel değerlerle değiştirdiğimizde elde ederiz.

ÖRNEK 9

Hesaplayınız: a) $\frac{2}{9}+\sqrt{3}$ (iki ondalığa kadar) b) $\sqrt{345}-\sqrt{344}$ (üç ondalığa kadar)

a) Yuvarlama:

$\frac{2}{9} \approx 0{,}22$ ve $\sqrt{3} \approx 1{,}73$

Hesaplıyoruz: $\frac{2}{9}+\sqrt{3} \approx 0{,}22+1{,}73 \approx 1{,}95$

b) $\sqrt{345} \approx 18{,}574$ $\sqrt{344} \approx 18{,}547$

$\sqrt{345}-\sqrt{344} = 18{,}574-18{,}547 = 0{,}027$

İfadede yer alan sayıları istenilen ondalık basamağa yuvarlıyoruz.
Eğer atılan ilk basamak 0, 1, 2, 3 veya 4 ise, yuvarlanan son basamak değişmez.
Eğer atılan ilk basamak 5, 6, 7, 8 veya 9 ise, yuvarlanan son basamak 1 artırılır.

Eğer daha büyük sayıda terimi, örneğin iki ondalığa yuvarlamamız gerekiyorsa, her bir terimi en az üç ondalık basamakla yazmak, ardından toplama veya çıkarma işlemini yapmak ve sonucu iki ondalığa yuvarlamak tavsiye edilir. Neden?

Gerçek Doğru Üzerinde Aralıklar

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun.
Tüm gerçek sayılardan x öyle ki $a < x < b$, bu küme (a, b) ile gösterilir ve **açık aralık** olarak adlandırılır:
$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } a < x < b\}$



Şekil 2

Gerçek doğru üzerinde açık aralık, $x = a$ ve $x = b$ noktaları arasında bulunan noktalardan oluşan kümedir; ancak $x = a$ ve $x = b$ noktaları bu aralığa dahil değildir (Şekil 2).

Tüm gerçek sayılardan x öyle ki $a \leq x < b$, bu küme $[a, b)$ ile gösterilir ve sağdan yarı açık aralık olarak adlandırılır:
$[a, b) = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } a \leq x < b \}$



Şekil 3

Gerçek doğru üzerinde sağdan yarı açık aralık, $x = a$ ve $x = b$ noktaları arasındaki noktalardan oluşan kümedir; burada $x = a$ noktası aralığa dahildir, ancak $x = b$ noktası aralığa dahil değildir (Şekil 3).

Tüm gerçek sayılardan x öyle ki $a < x \leq b$, bu küme $(a, b]$ ile gösterilir ve soldan yarı açık aralık olarak adlandırılır:
$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } a < x \leq b\}$



Şekil 4

Gerçek doğru üzerinde soldan yarı açık aralık, $x = a$ ve $x = b$ noktaları arasındaki noktalardan oluşan kümedir; burada $x = a$ noktası aralığa dahil değildir, ancak $x = b$ noktası aralığa dahildir (Şekil 4).

Tüm gerçek sayılardan x öyle ki $a \leq x \leq b$, bu küme $[a, b]$ ile gösterilir ve kapalı aralık olarak adlandırılır :
$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } a \leq x \leq b\}$.



Şekil 5

Gerçek doğru üzerinde kapalı aralık, $x = a$ ve $x = b$ noktaları arasındaki noktalardan oluşan kümedir; burada hem $x = a$ hem de $x = b$ noktaları aralığa dahildir (Şekil 5).

Kümeler $[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } x \geq a\}$ ve $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } x \leq a\}$ sınırsız kapalı aralıklar olarak adlandırılır (Şekil 6 ve Şekil 7).



Şekil 6



Şekil 7

Kümeler $(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } x > a\}$ ve $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } x < a\}$ sınırsız açık aralıklar olarak adlandırılır (Şekil 8 ve Şekil 9).



Şekil 8



Şekil 9

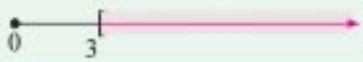
ÖRNEK 10

Aşağıdaki aralığı sözel olarak yazınız ve gerçek doğru üzerinde gösterin (Şekil 10):
a) $(-3, 5]$ b) $[3, +\infty)$

a) $(-3, 5] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } -3 < x \leq 5\}$



b) $[3, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } x \geq 3\}$



Şekil 10

SORU 5

Aşağıdaki aralığı sözel olarak yazınız ve gerçek doğru üzerinde gösterin:
a) $(-2, 4)$ b) $[-3, -1)$ c) $(5, 8]$ d) $[-5, 4]$
e) $[-2, +\infty)$ f) $(-\infty, 1]$ g) $(4, +\infty)$ h) $(-\infty, 3)$

ÖRNEK 11

Bulunuz: a) $(-1, 4] \cup [2, 7]$ b) $[-7, 5] \cap [-8, 2)$

a) $(-1, 4] \cup [2, 7] = (-1, 7]$ b) $[-7, 5] \cap [-8, 2) = [-7, 2)$

SORU 6

Radar hızı [50, 120] kilometre/saat aralığında ölçer. Hızı 120 kilometre/saat olan bir sürücünün hızı ölçülebilir mi? Peki hızı 49,9 kilometre/saat olan bir sürücünün hızı ölçülebilir mi?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur:
   a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{I}$ d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Gerçek sayıları karşılaştırın:
   a) $-13{,}0010\ldots$ ve $-13{,}0001$ b) $\sqrt{3}$ ve $\frac{7}{5}$ c) $\frac{36}{25}$ ve $\sqrt{2}$

3. $a = -3{,}7$ ve $b = -11{,}5$ olsun. Aşağıdakinin değerini hesaplayın:
   a) $|a + b|$ b) $|a - b|$ c) $|a \cdot b|$ d) $\frac{|a|}{|b|}$

4. Üç ondalık basamağa kadar hesaplayın:
   a) $\sqrt{49} - \sqrt{3} + \pi$ b) $5 : \sqrt{5} + 2\sqrt{7}$ c) $3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt{5}$ d) $3\pi + 4 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{17}$

5. Bir hücre, yarıçapı $r = 2{,}1$ mikrometre olan bir küre şeklindedir.
   Kürenin hacmi aşağıdaki formülle hesaplanır: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
   $\pi \approx 3{,}14$ alındığında hücrenin yaklaşık hacmini hesaplayın.

6. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur:
   a) $2 \in (2, 5)$ b) $3 \in (-7, 3]$ c) $\sqrt{2} \in [1, 3]$ d) $7 \in (-\infty, -7]$

7. Kümenin aralık biçiminde gösterimini yazın:
   a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } -2 \leq x < 1\}$ b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } -2,4 < x < 6,7\}$
   c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } -\infty < x \leq \sqrt{5}\}$ d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } -\sqrt{3} < x < \infty\}$

8. Aralığı sayı doğrusunda gösteriniz ve sözel olarak yazın:
   a) $[-3, 5]$ b) $(1, 3)$ c) $[-6, 7)$ d) $(-\infty, 1)$ e) $[3, +\infty)$

9. Sayı doğrusu üzerinde aralıkların birleşimini gösterin:
   a) $(-3, 4]$ ve $[2, 7)$ b) $(-1, 1)$ ve $[0, 3]$ c) $(-\infty, 3)$ ve $(0, 5)$ d) $[-4, 1)$ ve $[-5, 3)$

10. Bulunuz:
    a) $[0, 3] \cap (1, 8)$ b) $(-5, 2] \cup (2, 4)$ c) $((-\infty, 3) \cap [0, +\infty)) \cup (-5, 5]$

11. Nötr pH değeri 7'dir. Asidik çözeltiler pH değeri 7'den küçük olan, bazik çözeltiler ise pH değeri 7'den büyük olan çözeltilerdir.
    Aşağıdaki aralıkları yazınız: a) Asidik çözeltiler b) Bazik çözeltiler

ARAŞTIRMA

İrrasyonel bir sayının yaklaşık değerini bulmak için kullanılan "tahmin et ve dene" yönteminin yanında, burada belirtilmeyen başka yöntemler de vardır. Bunlardan biri irrasyonel bir sayının yaklaşık değerini bulmaya yönelik Babil yöntemidir.

Babil yöntemini araştırınız ve "tahmin et ve dene" yöntemine göre bazı avantajlarını ve dezavantajlarını ortaya çıkarınız.

1.10. Oranlar ve Orantılar

Oranlar ve Oranların Özellikleri

Matematikte ve günlük hayatta şu tür problemlerle karşılaşırız:

a) Bir nicelik diğerinden kaç kat daha büyüktür?

b) Bir niceliğin ne kadarlık kısmını diğer nicelik temsil etmektedir?

ETKİNLİK

a) 18 sayısının 6 sayısından kaç kat daha büyük olduğunu nasıl hesaplayacaksın?

b) Bir kap 12 litre su ile dolmaktadır. 6 litre su kabın ne kadarlık kısmını kapladığını nasıl hesaplayacaksın?

01

$a : b$ (veya $\frac{a}{b}$), $b \neq 0$ olmak üzere, iki türdeş büyüklüğün ölçü sayılarının bölümüne o büyüklüklerin oranı denir.

Sayı a'ya oranın birinci elemanı, sayı b'ye ise oranın ikinci elemanı denir.

$a : b$ bölümünün değeri, oranın değeri veya orantı katsayısı olarak adlandırılır ve genellikle k ile gösterilir.

$a : b$ oranı, bilinen şeklinin (a bölü b) yanında "a'ya göre b" şeklinde de okunur.

ÖRNEK 1

Bir duvar, 3 kısım boya ve 2 kısım kumdan oluşan bir karışımla sıvanmıştır. Karışımı şu oranlar şeklinde yazın: a) Boya ile kum arasındaki oran b) Kum ile boya arasındaki oran

a) Boya ile kum arasındaki oran 3 : 2'dir. b) Kum ile boya arasındaki oran 2 : 3'tür.

SORU 1

Uzunluğu 20 cm olan bir şerit, 3 : 2 oranında bölünmüştür. Elde edilen parçaların uzunlukları kaç cm'dir?

ÖRNEK 2

2 : 3 ve 3 : 2 oranları, sadece elemanlarının yerleri farklı olduğu için birbirinin tersine olan oranlara örnektir. Bu oranların değerlerinin çarpımı 1'e eşittir, yani:

$(2 : 3) \cdot (3 : 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$

ÖRNEK 3

İki oranın eşit olduklarını, değerleri eşit olduğunda söyleriz. Örneğin, oranlar $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ ve $\frac{5}{6} : \frac{5}{9}$ eşittir, çünkü $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$ ve $\frac{5}{6} : \frac{5}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{2}$

Buna karşılık, oranlar $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ ve $\frac{4}{5} : \frac{3}{6}$ eşit değildir, çünkü $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ ve $\frac{4}{5} : \frac{3}{6} = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{3} = \frac{8}{5}$

ÖRNEK 4

a) 3 : 4 oranı iki elemandan oluşur ve **basit oran** olarak adlandırılır.

b) 5 : 6 ve 6 : 8 oranlarından, 5 : 6 : 8 şeklinde yazılan **uzatılmış oran** elde edilir; bu oran ikiden fazla elemandan oluşur.

c) 4 : 9 : 6 uzatılmış oranı ile üç basit oran belirlenir: 4 : 9, 9 : 6 ve 4 : 6.

ÖRNEK 5

2 : 3 ve 4 : 6 oranları eşittir. Hesaplamaları takip edin:

$2 : 3 = 4 : 6 = (2 \cdot 2) : (2 \cdot 3)$ ve $4 : 6 = 2 : 3 = (4 : 2) : (6 : 2)$.

Bir oranın elemanları, sıfırdan farklı aynı bir sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde, oranın değeri değişmez.



Bir oranın elemanları, sıfırdan farklı aynı bir sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde, oranın değeri değişmez.

ÖRNEK 6

5 : 13 oranını, ikinci elemanı 52 olacak şekilde yazın.

Eğer ikinci eleman 13 yerine 52 yazılırsa, bu 13 sayısını 4 ile çarpmış olduğumuz anlamına gelir. Oranın değeri aynı kalması için 5 sayısını da 4 ile çarpmamız gerekir.
Buna göre: $5 : 13 = (5 \cdot 4) : (13 \cdot 4) = 20 : 52$.

SORU 2

Oranı, elde edilen oranın birinci elemanı 1 olacak şekilde yazın.

a) 3 : 6 b) 20 : 400 c) 70 : 28 d) 45 : 0,9 e) 0,25 : 0,07

ÖRNEK 7

Oranların temel özelliğini kullanarak oranı sadeleştirin. $2\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7}$.

$2\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7} = \frac{9}{4} : \frac{9}{7} = \frac{1}{4} : \frac{1}{7} = \frac{7}{28} : \frac{4}{28} = 7 : 4$.

ÖRNEK 8

Bir kilogram karışık çay; 350 gram Hint çayı, 500 gram Endonezya çayı ve geri kalanı Çin çayından oluşur.

a) Çin çayının Hint çayına oranı nedir?

b) Hint çayı : Endonezya çayı : Çin çayı oranını belirleyin.

c) Karışımdaki Hint çayının payı nedir?

a) Çin çayının miktarı: $1000 - (350 + 500) = 150$ gramdır.
Çin çayının Hint çayına oranı $150 : 350 = 3 : 7$'dir.

b) Hint çayı : Endonezya çayı : Çin çayı oranı $350 : 500 : 150 = 7 : 10 : 3$'tür.

c) Çay toplamda 20 parçaya ayrılmıştır $(7 + 10 + 3)$. 7 parça Hint çayı, 10 parça Endonezya çayı, 3 parça Çin çayıdır. Buna göre Hint çayının karışımdaki payı $\frac{7}{20}$'dir.

ÖRNEK 9

Haritadaki ölçek 1 : 200000 olduğunda, harita üzerinde 55 cm ile gösterilen Üsküp ile Kırçova şehirleri arasındaki gerçek mesafe kaçtır?

Eğer 1 : 200 000 ölçekli bir haritada 55 cm'lik bir mesafe ölçersek, o zaman haritada 1 cm mesafe, gerçekte 200 000 cm = 2 km'ye karşılık gelir. Buna göre, 55 cm gerçekte 55 · 2 = 110 km'ye karşılık gelir.

SORU 3

Bir sınıfın tabanı, kenarları 9 metre ve 6 metre olan bir dikdörtgen biçimindedir. Ölçeği 1 : 300 olan bir çizimde, tabanın uzunluğu ve genişliği ne kadar olacaktır?

Orantılar ve Orantıların Özellikleri

ETKİNLİK

3 : 2 ve 18 : 6 oranları eşit midir? Cevabınızı açıklayın.

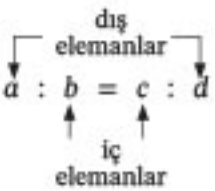
Eğer $a : b$ ve $c : d$ oranları eşitse, bunu $a : b = c : d$ şeklinde yazarız ve "a'nın b'ye oranı, c'nin d'ye oranı gibidir" ya da "a'nın b'ye oranı, c'nin d'ye oranına eşittir" deriz.
Eşitlik $a : b = c : d$, orantı olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, eğer $a : b = k$ ve $c : d = k$ ise, o hâlde $a : b = c : d$ bir orantıdır. a ve c sayılarının, b ve d sayılarıyla orantılı olduğu söylenir. Sayı k ise orantı katsayısı olarak adlandırılır.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki eşitliklerin orantı olup olmadığını kontrol edin: a) $12 : 3 = 20 : 5$ b) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{5}{6} : 10$

a) $12 : 3 = 20 : 5$, çünkü $12 : 3 = 4$ ve $20 : 5 = 4$
b) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{5}{6} : 10$, çünkü $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$ ve $\frac{5}{6} : 10 = \frac{1}{12}$

Her orantı dört elemandan oluşur, bunlar soldan sağa doğru orantının birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü elemanı olarak adlandırılır. Birinci ve dördüncü eleman orantının dış elemanları, ikinci ve üçüncü eleman ise orantının iç elemanları olarak adlandırılır.



ÖRNEK 11

Orantıda $3 : 15 = 5 : 25$, sayılar 3 ve 25 dış elemanlardır, sayılar 15 ve 5 ise iç elemanlardır.

$3 \cdot 25 = 75$ dış elemanların çarpımı,
$15 \cdot 5 = 75$ iç elemanların çarpımına eşittir.

Aşağıda orantıların bazı özelliklerini vereceğiz.



Orantıların Temel Özelliği, bir orantının dış elemanlarının çarpımı, orantının iç elemanlarının çarpımına eşittir.

ÖRNEK 12

$7 : 21 = 7 : 6$ orantısında $7 \cdot 6 = 21 \cdot 2$ eşitliği geçerlidir.



Eğer sıfırdan farklı iki sayının çarpımı, diğer iki sayının çarpımına eşitse, o hâlde bu dört sayıdan bir orantı kurulabilir.

ÖRNEK 13

2, 3, 6 ve 9 sayılarından bir orantı kurulabilir, çünkü $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$'dır.

Orantı şu şekilde olacaktır: $2 : 3 = 6 : 9$.



Bir orantıda, bir dış ve bir iç eleman ya da tüm elemanlar, sıfırdan farklı aynı bir sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde, orantı değişmez.

Bu son özellik, orantıların sadeleştirilmesinde kullanılır; yani orantının bazı elemanları kesirli veya ondalık sayılar olduğunda ya da bir iç ve bir dış eleman veya orantının tüm elemanları ortak bir çarpana sahip olduğunda uygulanır.

ÖRNEK 14

Orantıyı sadeleştiriniz. $\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = x : \frac{7}{15}$.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = x : \frac{7}{15}$ Orantının tüm elemanlarını EKOK(3, 5, 15) = 15 ile çarparız.

$10 : 3 = 15x : 7$

$10 : 45 = x : 7$ Birinci ve ikinci elemanları 5 sayısına böleriz.

$2 : 9 = x : 7$

Bir orantının çözülmesinden, üç elemanı bilindiğinde orantıdaki bilinmeyen elemanın bulunması anlaşılır.

ÖRNEK 15

$8 : 5 = x : 7{,}5$ orantısında bilinmeyen elemanı bulun.

$8:5=x:7{,}5$ Orantıların temel özelliğini uygularız.
$5\cdot x=8\cdot 7{,}5$
$5x=60$
$x=12$

SORU 4

Aşağıdaki orantıda bilinmeyen eleman x'i hesaplayın:

a) $3x:8=9:5$ b) $12:(x+1)=3:4$ c) $3:4=(7-x):(7+x)$

Uzatılmış Orantı

ÖRNEK 16

Eşit olan 2 : 1, 4 : 2 ve 8 : 4 oranlarını eşitlik işareti ile birleştirirsek, 2 : 1 = 4 : 2 = 8 : 4 orantısını elde ederiz. Bu, uzatılmış orantıya bir örnektir.

Üç veya daha fazla oranın eşitliği, **uzatılmış orantı** olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, eğer $a_1:b_1=k$, $a_2:b_2=k$,..., $a_n:b_n=k$ ise, o hâlde $a_1:b_1=a_2:b_2=\ldots=a_n:b_n$ bir uzatılmış orantıdır.
$a_1, a_2,\ldots, a_n$ sayılarının, sırasıyla $b_1, b_2,\ldots, b_n$ sayılarıyla orantılı oldukları söylenir.
k sayısı, **orantı katsayısı** olarak adlandırılır.
Uzatılmış orantılar genellikle şu şekilde yazılır: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ ya da $a_1:a_2:\ldots:a_n=b_1:b_2:\ldots:b_n$.

ÖRNEK 17

$a:b=4:3$, $b:c=3:8$ ve $c:d=4:5$ orantılarından bir uzatılmış orantı oluşturun.

$c:d=4:5$ orantısından $c:d=8:10$ bulunur, bu nedenle uzatılmış orantı şu şekilde olacaktır:
$a:b:c:d=4:3:8:10$.

SORU 5

$x:4=6:y=3:2$ uzatılmış orantısından x ve y değerlerini bulun.

Uzatılmış orantı, sıfırdan farklı aynı bir sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde değişmez; bu sayı herhangi bir birinci eleman ve ona karşılık gelen ikinci elemana uygulanabilir ya da tüm birinci elemanlara veya tüm ikinci elemanlara uygulanabilir. Bu son özellik, uzatılmış orantıların sadeleştirilmesinde kullanılır.

ÖRNEK 18

Uzatılmış orantıyı sadeleştirin. $a_1:a_2:a_3=\frac{7}{8}:\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$

$a_1:a_2:a_3=\frac{7}{8}:\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ Tüm ikinci elemanları EKOK(8, 4, 2) = 8 sayısı ile çarparız.
$a_1:a_2:a_3=7:6:4$

Uzatılmış orantıda tüm birinci elemanların toplamının, tüm ikinci elemanların toplamına oranı; herhangi bir birinci elemanın kendi ikinci elemanına oranı ile aynıdır. Yani uzatılmış orantı için $a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n$ olduğunda şu eşitlik geçerlidir:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

ÖRNEK 19

450 sayısını 2 : 3 : 5 : 8 oranında dört parçaya ayırın.

Aranan parçaları x, y, z ve w ile gösterelim. Sorunun koşuluna göre:

$x + y + z + w = 450$ ve $x : y : z : w = 2 : 3 : 5 : 8$'dir.

Buradan $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 5k$ ve $w = 8k$ bulunur; burada k, orantı katsayısıdır.

Uzatılmış orantıların özelliğine göre:

$2k + 3k + 5k + 8k = 450$, $18k = 450$ ve $k = 25$.

Aranan parçalar:

$x = 2k = 2 \cdot 25 = 50$, $y = 3k = 3 \cdot 25 = 75$, $z = 5k = 5 \cdot 25 = 125$ ve $w = 8k = 8 \cdot 25 = 200$.

SORU 6

Bir üçgenin kenar uzunlukları için $a : b : c = 5 : 7 : 11$ oranı geçerlidir ve çevresi 115 cm'dir. Üçgenin kenar uzunlukları kaç cm'dir?

Doğru Orantı ve Ters Orantı

ÖRNEK 20

1 kilogram elmanın fiyatı 30 dinar ise, 2, 3, 4, 5, ... kilogram elmanın fiyatı aşağıdaki tabloda düzenli olarak gösterilmiştir:

Elma miktarı (kg)	1	2	3	4	5	6	7	...
Fiyat (dinar)	30	60	90	120	150	180	210	...

Tablodan şu sonucu çıkarırız: $1 : 2 = 30 : 60$, $2 : 3 = 60 : 90$, $3 : 4 = 90 : 120$, vb.

Yani, bir büyüklük (miktar) 2, 3, 4, 5, ... kat artırıldığında, diğer büyüklük (malın değeri) de aynı oranda artar ve tersine.

X ve Y değişken büyüklüklerinin, herhangi iki rastgele alınmış uygun değerinin oranı, diğerinin karşılık gelen değerlerinin oranına eşitse, X ve Y'nin **doğru orantılı bağıntı** içinde olduklarını söyleriz.

Aralarında doğru orantılı bağıntı bulunan büyüklüklere **doğru orantılı büyüklükler** denir.

ÖRNEK 21

Doğru orantılı büyüklüklere örnekler: Karenin çevresi ve kenarı; sabit yoğunlukta bir cismin ağırlığı ve hacmi; işçilerin sayısı ve onların yaptığı iş vb.

X ve Y iki doğru orantılı büyüklük olsun. Eğer $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ büyüklük X'in bazı rastgele uygun değerleri, $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ise büyüklük Y'nin bunlara karşılık gelen değerleri ise, karşılık gelen değerlerin bölümü sabit bir sayıdır. Yani:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k$$

Sayı k, X ve Y doğru orantılı büyüklüklerinin orantı katsayısı olarak adlandırılır.

ÖRNEK 22

a) Bir çemberin çevresi ile yarıçapı, orantı katsayısı $k = 2\pi$ olan doğru orantılı büyüklüklerdir.

b) Eşkenar üçgenin çevresi, kenar uzunluğu ile orantı katsayısı $k = 3$ olan doğru orantılı bir büyüklüktür.

ÖRNEK 23

Bir teknik çizimde iki çember çizilmiştir. Bunlardan birinin yarıçapı 10 cm ve çevresi 62,8 cm'dir. Yarıçapı 25 cm olan diğer çemberin çevresi kaç cm olacaktır?

Verilen büyüklükler doğru orantılıdır. Orantı katsayısı:

$k = \frac{62,8}{10} = 6,28$.

Yarıçapı 25 cm olan çemberin çevresini x ile gösterirsek: $\frac{x}{25} = 6,28$ olur, buradan $x = 157$ cm bulunur.

Diğer çemberin çevresi 157 cm'dir.

SORU 7

Bir 3 boyutlu yazıcı 2 saatte 5 model basabilmektedir. Aynı hızla çalıştığında 6 saatte kaç model basacaktır?

ÖRNEK 24

İki şehir arasındaki mesafe 120 km'dir. Bu mesafe, hareket hızına bağlı olarak farklı sürelerde katedilebilir. Hız ile yolun alınması için gerekli zaman arasındaki bağıntıyı incelemek amacıyla aşağıdaki tabloyu düzenleyeceğiz:

Hız (km/sa)	5	10	15	20	30	60	120	...
Süre (saat)	24	12	8	6	4	2	1	...
Yol (kilometre)	120	120	120	120	120	120	120	...

Tablodan şu sonuç çıkar:

$5 : 10 = 12 : 24$, $5 : 15 = 8 : 24$, $5 : 30 = 4 : 24$, $15 : 60 = 2 : 8$ vb.

Ayrıca şu eşitlik geçerlidir: $5 \cdot 24 = 10 \cdot 12 = 15 \cdot 8 = 20 \cdot 6 = 30 \cdot 4 = \ldots = 120 \cdot 1 = 120$.

Bir büyüklük (hız) 2, 3, 4, 5, ... kat artarsa, diğer büyüklük (zaman) aynı oranlarda azalır ve tersine.

İki değişken büyüklük X ve Y, eğer birinin herhangi iki rastgele uygun değerinin oranı, diğerinin karşılık gelen değerlerinin ters oranına eşitse, **ters orantılı bağıntı** içinde bulunur.

Aralarında ters orantılı bağıntı bulunan büyüklüklere **ters orantılı büyüklükler** denir.

ÖRNEK 25

Ters orantılı büyüklüklere örnekler: sabit alanlı bir dikdörtgenin uzunluğu ile genişliği; sabit sıcaklıktaki belirli miktarda bir gazın basıncı ile hacmi; işçilerin sayısı ile onların belirli bir işi tamamlama süresi vb.

X ve Y iki ters orantılı büyüklük olsun. Eğer $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ büyüklük X'in bazı rastgele uygun değerleri, $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ise büyüklük Y'nin bunlara karşılık gelen değerleri ise, karşılık gelen değerlerin çarpımı sabit bir sayıdır. Yani:

$y_1x_1 = y_2x_2 = \ldots = y_nx_n = k$.

Sayı k, X ve Y ters orantılı büyüklüklerinin orantı katsayısı olarak adlandırılır.

ÖRNEK 26

Bir bataryanın 5 volt ile şarjı 10 saat sürüyorsa, 10 volt ile şarjı kaç saat sürecektir?

Batarya şarjında farklı voltajlar kullanılır. Voltaj ne kadar büyük olursa, şarj süresi o kadar kısa olur. Yani voltaj ile süre ters orantılı büyüklüklerdir. Orantı katsayısı $k = 5 \cdot 10 = 50$'dir.

Eğer 10 volt ile bataryanın şarj süresini x ile gösterirsek, $10x = 50$ olur, buradan $x = 5$ saat bulunur. Bataryanın 10 volt ile şarjı 5 saat sürecektir.

SORU 8

On iki işçi belirli bir işi 10 günde tamamlamıştır. Aynı işi aynı verimlilikle çalışan 15 işçi kaç günde tamamlayacaktır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir okulda 900 öğrenci ve 26 öğretmen vardır.
   a) Öğrenci ile öğretmen arasındaki oranı sade biçimde yazın.
   b) Sonraki öğretim yılında öğrenci sayısı 60 artmış ve 4 yeni öğretmen işe alınmıştır. Öğrenci ile öğretmen arasındaki yeni oranı belirleyin.
   c) Hangi oranda öğrenci sayısı daha fazladır?

2. Ölçeği 1 : 300 000 olan bir haritada iki şehir arasındaki uzaklık 18,5 cm ise, şehirler arasındaki gerçek uzaklığı bulun.

3. Basit oranlar 2 : 3, 5 : 6 ve 9 : 10'dan elde edilen uzatılmış oranı yazın.

4. Orantıların doğruluğunu inceleyin:
   a) $3:5=12:20$ b) $4:5=\frac{1}{5}:\frac{1}{4}$ c) $x^2:y^2=xy:\frac{y^3}{x}, x\neq 0, y\neq 0$

5. Orantıyı sadeleştirin: a) $\frac{1}{6}:\frac{2}{5}=\frac{3}{8}:x$ b) $x:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}:\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{4}:x=\frac{2}{5}:\frac{1}{6}$

6. Orantıda bilinmeyen elemanları hesaplayın: $2:3=x:6=8:y=z:18$

7. $a:b=2:3$, $b:c=6:5$ ve $c:d=15:11$ orantılarından bir uzatılmış orantı oluşturun.

8. 600 sayısını 1 : 3 : 6 oranında parçalara ayırın.

9. Bir seradan günde 1376 sarı, kırmızı ve beyaz gül toplanmaktadır. Sarı güllerin sayısı ile kırmızı güllerin sayısı 5 : 6 oranında, kırmızı güllerin sayısı ile beyaz güllerin sayısı 4 : 7 oranında ise, her renkten kaç gül toplanmaktadır?

10. Düzenli bir altıgenin çevresi ile bir kenarı hangi bağıntı içindedir? Orantı katsayısı nedir?

11. Bir üçgenin kenarları 3 cm, 4 cm ve 5 cm'dir; onunla benzer olan başka bir üçgenin en kısa kenarı 6 cm'dir. Bu üçgenin diğer kenarlarını bulun.

12. Bir borunun bir havuzu doldurma hızı (dakikada litre cinsinden) ile havuzun dolma süresi (dakika cinsinden) arasındaki bağıntı nedir? Orantı katsayısı kaçtır?

13. Bir depo bir pompayla 18 saatte boşalır. Aynı hızla çalışan 3 pompa devreye alınırsa depo kaç saatte boşalır?

1.11. Yüzde Hesabı

Yüzdelerin Ondalık Sayılara ve Kesirlere Dönüştürülmesi

ETKİNLİK

Aşağıdaki oranları adlandırın ve gösterin: a) 1 : 100, b) 50 : 100, c) 100 : 100
Bu oranların her biri bütünden hangi kısmı belirlemektedir?

Her giysi üzerine, üretici giysinin yapıldığı malzemenin bileşimini gösteren bir etiket koyar. Monika'nın elbisesinin dikildiği kumaşın bileşiminin %80'i ipektir.

$80\% = \frac{80}{100} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{4}{5}$ İpek bileşimi kesir olarak dönüştürülmüş hâli.

$80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8$ İpek bileşimi ondalık sayı olarak dönüştürülmüş hâli.

ÖRNEK 1

a) Ondalık sayı 0,16'nın yüzdeye dönüştürülmesi:

$0{,}16 = \frac{16}{100} = 16\%$

b) Kesir $\frac{3}{5}$'in yüzdeye dönüştürülmesi:

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$

SORU 1

Eşdeğer kesirler, ondalık sayılar ve yüzdeler ile tabloları yeniden çizin ve doldurun.

Kesir	Ondalık sayı	Yüzde
$\frac{5}{8}$		
	0,34	
		1,5%

Kesir	Ondalık sayı	Yüzde
$\frac{3}{4}$		
	0,25	
		93%

ÖRNEK 2

Aşağıdaki sayıları en küçükten başlayarak büyüklük sırasına göre düzenleyin: 0,1; $\frac{9}{50}$; 9%

En kolay yol, sayıları yüzde olarak yazmaktır:

$\frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 18\%$ ve $0{,}1 = \frac{10}{100} = 10\%$.

Sayıların en küçükten başlayarak sıralanışı şöyledir: %9, 0,1 ve $\frac{9}{50}$.

SORU 2

Aşağıdaki sayıları en büyükten başlayarak büyüklük sırasına göre düzenleyiniz:

a) 0,57, $\frac{26}{50}$, 56% b) 33%, $\frac{4}{11}$, 0,3 c) 0,5, $\frac{1}{5}$, 5%

Temel değer, Yüzde değer ve Yüzde

Belirttiğimiz gibi, $a : 100$ biçimindeki oran yüzde olarak adlandırılır ve $a\%$ ile gösterilir. Uygulamada çeşitli başarı ve başarısızlıklar, malların fiyatlarındaki artış veya düşüşler ya da üretimdeki değişimler bu özel oran türleri ile ifade edilir. Yüzde her şeyden önce bir oran olduğundan, oranın tüm özellikleri yüzde için de geçerlidir. Ancak yüzdelerle yapılan işlemler, öneminden dolayı **yüzde hesabı** adını taşır.

ÖRNEK 3

Bir okul matematik yarışmasında Ina, sorulan toplam 25 sorudan 17'sine doğru cevap vermiştir. Aynı yarışmada Mirko, sorulan toplam 20 sorudan 13'üne doğru cevap vermiştir. Şu soru ortaya çıkmaktadır: Hangi yarışmacı daha başarılı olmuştur?

Ina, toplam 25 sorudan 17'sine doğru cevap vermiştir. Sonuç, $17 : 25$ oranı ile ifade edilebilir. Benzer şekilde, Mirko'nun 20 sorudan 13 doğru cevabı, $13 : 20$ oranı ile ifade edilebilir. Şimdi sorunun cevabı, $17 : 25$ oranının mı yoksa $13 : 20$ oranının mı daha büyük olduğunu karşılaştırmaya indirgenir.

Şu orantıları kuralım: Ina: $17 : 25 = x : 100$, buradan $x = 68$. Mirko: $13 : 20 = y : 100$, buradan $y = 65$.

Buna göre, Ina'nın sonucu $17 : 25$ oranı ile %68'e eşittir. Mirko'nun sonucu $13 : 20$ oranı ile %65'e eşittir. Dolayısıyla Ina, soruların %68'ine doğru cevap vererek Mirko'dan daha iyi bir sonuç göstermiştir; Mirko ise soruların %65'ine doğru cevap vermiştir.

Örnekte gördüğümüz gibi, yüzde hesabında şu büyüklükler yer alır: sabit 100, temel değer S, yüzde p ve yüzde tutarı P. Bunlar şu orantı ile birbirine bağlıdır:
$P : S = p : 100$.

Yukarıdaki orantıda değerlerden ikisi biliniyorsa, üçüncü değer aşağıdaki formüllerden biri ile hesaplanabilir: $P = \frac{S \cdot p}{100}$ ya da $S = \frac{100 \cdot P}{p}$ ya da $p = \frac{100 \cdot P}{S}$.

ÖRNEK 4

İrina'nın 5000 dinarı vardır. Bir projeye katılım için aldığı ücret, sahip olduğu toplam miktarın %12'si olduğuna göre, bakiyesi kaç dinar artmıştır?

Verilenler: Temel değer $S = 5000$ ve yüzde $p = 12$. Aranan: Yüzde tutarı P.

Yüzde tutarını hesaplama formülüne göre: $P = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{5000 \cdot 12}{100} = 600$.
İrina'nın bakiyesi 600 dinar artmıştır.

ÖRNEK 5

Bir çift ayakkabının fiyatı %12 oranında artırılmıştır. Ayakkabıların fiyatındaki artış 840 dinar olduğuna göre, zamdan önce ayakkabıların fiyatı ne kadardı?

Verilenler: Yüzde tutarı $P = 840$ ve yüzde $p = 12$. Aranan: Temel değer S.

Temel değeri hesaplama formülüne göre: $S = \frac{100 \cdot P}{p} = \frac{100 \cdot 840}{12} = 7000$.

Ayakkabıların zamdan önceki fiyatı 7000 dinardır.

ÖRNEK 6

Bir şirket, 3 ton ambalaj ile birlikte 30 ton meyve satın almıştır. Ambalajın yüzdesi kaçtır?

Verilenler: Temel değer $S = 30$ ve yüzde tutarı $P = 3$. Aranan: Yüzde p.

Yüzde hesaplama formülüne göre: $p = \frac{100 \cdot P}{S} = \frac{100 \cdot 3}{30} = 10$.
Ambalajın yüzdesi p = 10'dur.

ÖRNEK 7

Bir atölyede 1800 el işi üretilmiş ve böylece norm %20 oranında aşılmıştır.
a) El işlerinin normu nedir? b) Norm kaç el işi ile aşılmıştır?

Verilenler: yüzde $p = 20$ ve temel değer ile yüzde tutarının toplamı $S + P = 1800$; arananlar temel değer S ve yüzde tutarı P'dir.

a) $S + P = S + \frac{S \cdot p}{100} = S(1 + \frac{p}{100})$. Sorunun koşuluna göre $S(1 + \frac{20}{100}) = 1800$;
buradan $\frac{120}{100}S = 1800$ ve S = 1500 el işi.

b) Norm, yüzde tutarı kadar aşılmıştır: $P = (S + P) - S = 1800 - 1500 = 300$ el işi.

SORU 3

Bir yazıcının fiyatı, bir mağazada %20 oranında artırılmıştır. Aynı yazıcının fiyatı, başka bir mağazada aynı başlangıç fiyatı üzerinden iki kez %10 artırılmıştır. Hangi mağazada yazıcı daha ucuzdur?

SORU 4

Aşağıdaki tabloda verilen fiyat artışlarından önce, hangi tür ekipman en pahalı ve hangi tür ekipman en ucuzdur?

Ekipman	Artış Oranı	Yeni Fiyat (€)
Cep telefonu	30%	200
Dizüstü bilgisayar	12,5%	1250
Tablet	4,5%	155
Bilgisayar	10%	1750

ÖRNEK 8

Yaz indirimleri döneminde bir gömleğin fiyatı %12 oranında düşürülmüş ve indirimli fiyat 1276 dinar olmuştur.
a) Gömleğin ilk fiyatı ne kadardı? b) Gömleğin fiyatı ne kadar düşürülmüştür?

Verilenler: Temel değer ile yüzde tutarının farkı $S - P = 1276$ ve yüzde $p = 12$.
Aranan: Temel değer S ve yüzde tutarı P.

a) Formüle göre: $S - P = S - \frac{S \cdot p}{100} = S(1 - \frac{p}{100})$ $S(1 - \frac{12}{100}) = 1276$ $\frac{88}{100}S = 1276$
S = 1450.
Yani, temel değer, yani gömleğin ilk fiyatı S = 1450 dinardır.

b) Gömleğin fiyatı, yüzde tutarı kadar düşürülmüştür: $P = S - (S - P) = 1450 - 1276 = 174$ dinar.

SORU 5

Bir mağazada klima cihazında %30 indirim vardır. Başka bir mağazada aynı başlangıç fiyatına sahip aynı klima cihazının fiyatı üç kez %10 indirilmiştir. Hangi mağazada klima cihazı daha ucuzdur?

SORU 6

Aşağıdaki tabloda verilen indirimlerden önce, en pahalı ve en ucuz giysi hangisidir?

Giysi	İndirim Oranı	Yeni Fiyat (dinar)
Kot pantolon	25%	1200
Kazak	17,5%	1238
Bluz	7,5%	555
Çorap	10%	45

SORU 7

Bir araştırma ekibinin yıllık bütçesi 2 000 000 dinardı. Ertesi yıl bütçe önce %15 oranında azaltılmış, ardından yeni miktar üzerinden %10 oranında artırılmıştır.

a) İlk azaltmadan sonra bütçe ne kadardır? b) Artırmadan sonra bütçe ne kadardır?

c) Son bütçe, başlangıç bütçesinden daha büyük müdür yoksa daha küçük müdür ve yüzde olarak fark ne kadardır?

Yüzde Hesabının Ekonomide Uygulanması

ÖRNEK 9

Bir şirket güneş panelleri kurmuş ve elektrik enerjisi satışından 240 000 dinar gelir elde etmiştir. Gelirin %25'i panellerin bakımı için, %18'i vergiler için ve %30'u enerji geliştirmesi için harcanmıştır. Kalan miktar ise kâr olmuştur.

a) Şirket bakım, vergiler ve enerji geliştirmesi için ayrı ayrı ne kadar harcamıştır?

b) Şirketin toplam gideri ne kadardır? c) Şirket ne kadar kâr elde etmiştir?

Gelir, şirketin elektrik enerjisi satışından kazandığı toplam para miktarını ifade eder. Sorunun koşuluna göre, şirket yıllık 240 000 dinar gelir elde etmiştir.

a) Şirket şu kadar harcamıştır: Bakım: %25 · 240 000 = 60 000 dinar
Vergiler: %18 · 240 000 = 43 200 dinar
Enerji geliştirmesi: %30 · 240 000 = 72 000 dinar

b) Şirketin toplam gideri: 60 000 + 43 200 + 72 000 = 175 200 dinar

c) Kâr veya kazanç, gelirden tüm giderler çıkarıldıktan sonra kalan miktardır. Gelir giderlerden büyük olduğunda ortaya çıkar.

Şirket 240 000 – 175 200 = 64 800 dinar kâr elde etmiştir.

SORU 8

Genç bir start-up şirketi kişisel bütçe yönetimi için bir mobil uygulama geliştirmiştir. Uygulamanın 5000 kullanıcısı vardır ve her biri aylık 120 dinar ödemektedir. Toplam gelirin %15'i pazarlamaya, %40'ı maaşlara ve %10'u sunucu ve teknolojilere harcanmaktadır. Kalan miktar ise kâr olmaktadır.

a) Şirketin aylık geliri ne kadar?
b) Pazarlama, maaşlar ve sunucular için giderler ne kadar?
c) Şirketin kârı ne kadar?

ÖRNEK 10

Küçük bir atölye, çanta üretimi için malzemeler, aletler ve maaşlara 600 000 denar harcamıştır. Üretilen tüm çantaları 660 000 denara satmıştır. Ayrıca, gelirinin %15'ini nakliyeye ödemiştir.
a) Nakliye için kaç denar ödenmiştir? b) Toplam giderler ne kadardır?
c) Atölye kâr mı zarar mı etmiştir ve bu ne kadardır?

Zarar veya kayıp, giderler gelirden fazla olduğunda ortaya çıkar.

a) Atölye nakliye için $\%15 \cdot 660\,000 = 99\,000$ denar ödemiştir.

b) Toplam giderler $600\,000 + 99\,000 = 699\,000$ denar tutmaktadır.

c) Atölye zarar etmiştir çünkü toplam giderler gelirden fazladır.

Zarar $699\,000 - 660\,000 = 39\,000$ denardır.

SORU 9

Ev aletleri satan bir şirket, bir seriyi parça başına 12 000 denar fiyattan satın almıştır.
Teknik sorunlar nedeniyle, cihazları parça başına %20 zarar ile satmak zorunda kalmıştır.
a) Her cihaz hangi fiyattan satılmıştır? b) Parça başına zarar ne kadardır?
c) 50 parça satılmışsa toplam zarar ne kadardır?

Katma değer vergisi (KDV), malların veya hizmetlerin değerine göre hesaplanan ve üretim ile ticaretin her aşamasında malların veya hizmetlerin değerine eklenen bir vergidir.
Ülkemizde KDV tüm ürün ve hizmetlerde %18'dir, istisna olarak bazıları için %5 indirimli vergi oranı uygulanır. KDV'nin hesaplanması pratikte nasıl işler?

ÖRNEK 11

Değirmen, 100 denar değerinde un üretir ve fırına %18 KDV dahil olacak şekilde
$100 + \%18 \cdot 100 = 100 + 18 = 118$ denara satar. Değirmen, 18 denar tutarındaki KDV'yi devlete öder.

Fırın, unu kullanarak 200 denar değerinde hamur işi üretir ve mağazaya %18 KDV dahil olacak şekilde
$200 + \%18 \cdot 200 = 200 + 36 = 236$ denara satar. Fırın, unu satın alırken ödediği 18 denar KDV'yi düşer ve devlete yalnızca $36 - 18 = 18$ denar öder.

Mağaza, 300 denar değerinde hamur işini tüketiciye %18 KDV dahil olacak şekilde
$300 + \%18 \cdot 300 = 300 + 54 = 354$ denara satar. Mağaza, 36 denar KDV'yi düşer ve yalnızca
$54 - 36 = 18$ denar öder.

Nihai tüketici KDV'yi öder, çünkü tam KDV'li fiyatı öder ve şirketlerin yapabildiği gibi bu KDV'yi düşme hakkı yoktur.

Bazı ilaçlar ve gıda ürünleri için %5 indirimli vergi oranı uygulanmaktadır.

SORU 10

Bir kırtasiye, KDV hariç 600 denar fiyattan bir ders kitabı satmaktadır. Ders kitapları için KDV oranı %5'tir.
a) KDV ne kadardır? b) KDV dahil ders kitabının nihai fiyatı ne kadardır?

Gümrük, bir devletin sınırlarından mal ithalatı sırasında alınan vergidir. Gümrüğün amacı, yerli üretimi dış rekabetten korumak, devlet bütçesine gelir sağlamak ve mal akışını kontrol etmektir.

Gümrük, mal yurtdışından ithal edildiğinde, yani mal bir ülkeden diğerine sınırdan geçirildiğinde alınır.

Gümrük vergisi, malın gümrük değerinin yüzdesi olarak hesaplanır. Bu gümrük değeri genellikle malın fatura değerini, malın nakliye masraflarını, malın sigortasını vb. içerir.

Malın gümrükleme işlemi tamamlandıktan sonra, tüketicinin KDV ödemesi gerekir.

ÖRNEK 12

İtan, yurtdışından 200 avro değerinde bir cep telefonu ithal etmek istiyor ve gümrük oranı %10'dur. Taşıma için 10 avro, sigorta için 5 avro ödemesi gerekmektedir. Cep telefonu için toplam ne kadar ödemesi gerekir, eğer cep telefonları için KDV oranı %18 ise?

Gümrük oranı %10'dur ve bu, malın fatura değeri, taşımacılık ve sigortanın toplamı üzerinden hesaplanır: $\%10 \cdot (200 + 10 + 5) = 21{,}5$ avro. Cep telefonunun gümrük ödenmiş değeri:

$215 + 21{,}5 = 236{,}5$ avro. Gümrük ödenmiş değer üzerinden %18 KDV hesaplanır:

$\%18 \cdot 236{,}5 = 42{,}57$ avro.

İtan, cep telefonu için toplamda şu kadar ödemelidir: $236{,}5 + 42{,}57 = 279{,}07$ avro.

SORU 13

Sanya, yurtdışından 100 avro değerinde bir fritöz sipariş etmiştir. Taşıma için 20 avro, sigorta için 8 avro ödemesi gerekmektedir. Gümrük oranı %15 ve KDV oranı %18'dir.
a) Gümrük olarak ne kadar ödemelidir? b) KDV ne kadar tutmaktadır?
c) Sanja, fritözü teslim alırken toplam ne kadar ödemelidir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kesri yüzdeye çevir: a) $\frac{17}{100}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{7}{9}$
2. Yüzdeyi ondalık sayıya çevir: a) 12% b) 93% c) 1,5% d) 75%
3. Yüzdeyi kesre çevir: a) 25% b) 50% c) 78% d) 15%
4. Ondalık sayıyı yüzdeye çevir: a) 0,24 b) 0,99 c) 0,875 d) 0,33
5. Hesapla: a) 750 kilometrenin %15'i b) 6000 denarın %12'si c) 200 litrenin %80'i

6. Bir sınıfta 7 öğrenci pekiyi, bu toplam öğrenci sayısının %20'sini temsil etmektedir. Sınıfta toplam kaç öğrenci vardır?

7. 23 tonluk mal kabulünde, taşımada %0,5 hasar tespit edilmiştir. Kaç kilogram mal hasar görmüştür?

8. Bir süpermarkette her çarşamba gıda ürünlerinde %15 indirim vardır. Maria, fiyatı 102 denar olan bir ürünü alırsa ne kadar para tasarruf edecektir?

9. Bir ülkede yıllık doğum oranı %0,3'tür. 3 yıl önce 40 milyon nüfusu olduğu biliniyorsa, ülkedeki nüfus sayısını belirle?

10. Seniha, %15 indirimle kot pantolon satın almış ve böylece 360 denar tasarruf etmiştir. Lina aynı kot pantolondan almaya gittiğinde indirim %25 olmuştur. Lina kaç denar ödemiştir?

11. Bir şirket teknik bir cihazı 60 000 denar fiyattan satıyor. Başlangıçta %20 indirim yapıyordu. Daha sonra, indirilmiş tutar üzerinden fiyatı %25 artırdı.
    a) İlk indirimden sonraki fiyat ne kadardır? b) Artırımdan sonraki fiyat ne kadardır?
    c) Yeni fiyat başlangıç fiyatıyla aynı mı, daha büyük mü yoksa daha küçük mü?

12. Jana makine mühendisidir ve bir otomobil fabrikasında çalışır. Brüt maaşı aylık 60 000 denardır. Bunun %18'i gelir vergisine, %8'i emeklilik sigortasına ve %5'i sağlık sigortasına gider.
    a) Maaşından toplam kaç denar kesilir? b) Net maaşı (kesintilerden sonra) ne kadardır?
    c) Net maaşının her ay %10'unu biriktirirse bir yılda ne kadar biriktirir?

13. Bir dijital pazarlama ajansı 500 000 denar gelir elde etmiştir. Gelirin %60'ı çevrim içi reklamdan, %25'i SEO optimizasyonundan ve kalanı tasarım ve danışmanlık hizmetlerinden gelmiştir. Çevrim içi reklam gelirinin %30'u çalışan maaşlarına, %15'i platform reklamlarına (Google, Meta vb. gibi) gitmiş, kalanı kâr olmuştur.
    a) Her hizmetten elde edilen gelir ne kadardır?
    b) Çevrim içi reklamdan çalışan maaşlarına kaç denar harcanmıştır?
    c) Çevrim içi reklamdan kâr kaç denardır?
    d)Diğer hizmetlerden (SEO ve tasarım) elde edilen kâr, onların gelirinin %40'ı olmuşsa toplam kâr ne kadardır?

14. Bir şirket iki tür elektronik cihaz satmaktadır, tip A ve tip B. Tip A cihazdan 80 adet satılmış ve %25 kâr elde edilmiştir. Alış fiyatı parça başına 10 000 denardır. Tip B cihazdan 60 adet satılmış ve %15 zarar edilmiştir. Alış fiyatı parça başına 12 000 denardır.
    a) Tip A cihazlardan elde edilen kâr ne kadardır? b) Tip B cihazlardan edilen zarar ne kadardır?
    c) Firma kâr mı elde etmiştir yoksa zararı mı vardır?

15. Bir ilaç nihai fiyat olarak 525 denardan satılmaktadır. İlaçlar için KDV oranı %5'tir.
    a) KDV hariç temel fiyat ne kadardır? b) KDV ne kadardır?

16. Jovana, yurt dışından fatura değeri 150 avro olan bir elektrikli süpürge sipariş etmiştir. Taşıma için 25 avro, sigorta için 10 avro ödemesi gerekmektedir. Gümrük oranı %10, KDV oranı %18'dir.
    a) Gümrük olarak ne kadar ödemelidir? b) KDV ne kadardır?
    c) Jovana, elektrikli süpürgeyi teslim alırken toplam ne kadar ödemelidir?

1.12. Basit ve Bileşik Üçlü Kural

Basit Üçlü Kural

ETKİNLİK

4 kilogram undan 5 kilogram ekmek elde ediliyorsa, 75 kilogram ekmek için kaç kilogram un gereklidir?

Oranların ve orantılı büyüklüklerin özellikleri, günlük uygulamalardaki problemlerin çözümünde geniş bir kullanım alanı bulur. Bunlar, bir büyüklüğün değeri ve ona karşılık gelen başka bir büyüklüğün değeri verildiğinde, bu büyüklüklerin doğru orantılı ya da ters orantılı olduğu durumlarda, bilinen diğer büyüklüğün değerine karşılık gelen değerin belirlenmesi gereken problemlerdir. Bu tür problemlere basit üçlü kural problemleri denir.

ÖRNEK 1

Ana, 50 defter için 1260 denar ödemiştir. Ana, 3780 denar ile kaç defter satın alabilir?

Problemin içinde iki büyüklük yer almaktadır: defter sayısı ve onlar için ödenen denar miktarı.

Ana, 50 defter için 1260 denar ödediğinden, şu şekilde yazabiliriz:

1260 denar 50 defter

Eğer aranan defter sayısını x ile gösterirsek, benzer şekilde şunu yazarız:

3780 denar x defter

Daha büyük bir denar miktarı ile Ana daha fazla defter alabileceğinden, büyüklükler doğru orantılıdır, bu nedenle şemadaki oklar aynı yöndedir:

↑1260 denar ↑50 defter
↓3780 denar ↓x defter

Şemaya göre orantıyı kurarız: $x : 50 = 3780 : 1260$ buradan şu sonucu buluruz:

$x = \frac{50 \cdot 3780}{1260} = 150$ defter. Yani, Ana 3780 denar ile 150 defter satın alabilir.

Görebiliyoruz ki basit üçlü kural ile problem çözme yöntemi şu adımlardan oluşmaktadır:

✓ Problemin koşulunu ilk satıra, soruyu ise ikinci satıra yazarız.

✓ Büyüklükler doğru orantılıysa oklar aynı yönde, ters orantılıysa oklar ters yönde çizilir; ilk ok bilinmeyenden başlar.

✓ Okların yönüne göre orantıyı kurarız ve buradan bilinmeyen değeri hesaplarız.

SORU 1

12 litre süt için 576 denar ödenmelidir. 16,5 litre süt için kaç denar ödenmelidir?

ÖRNEK 2

Belirli bir miktar pamuk ipliğinden 140 cm genişliğinde 92 m kumaş dokunabilir. Aynı miktar pamuk ipliğinden kumaş genişliği 80 cm olursa kaç metre kumaş dokunabilir?

İki büyüklük – kumaşın uzunluğu ve genişliği – aynı miktar pamuk ipliğinden dokunabilecek kumaş açısından birbirine ters orantılıdır. Bu nedenle, şemadaki oklar ters yöndedir:

↑ 92 m kumaş	| 140 cm genişliğinde
↑ x m kumaş	↓ 80 cm genişliğinde

Şemaya göre orantıyı kurarız: $x : 92 = 140 : 80$ buradan şu sonucu buluruz:

$x = \frac{92 \cdot 140}{80} = 161$ metre.

Yani, aynı miktar pamuk ipliğinden 80 cm genişliğinde 161 m kumaş dokunacaktır.

SORU 2

Üç işçi bir işi 16 günde bitirmelidir. Aynı işi, aynı koşullarda 4 işçi kaç günde bitirir?

Para Birimlerinin Dönüştürülmesinde Basit Üçlü Kuralın Uygulanması

Çoğu ülkenin kendi para birimleri vardır. Başka bir ülkeye seyahat ettiğimizde veya fiyatları karşılaştırdığımızda, bir para birimini diğerine çevirmemiz gerekir.

Döviz kuru bize, bir para biriminin 1 birimi karşılığında diğerinden kaç birim alacağımızı söyler.

ÖRNEK 3

Kur: 1 Amerikan Doları (USD) = 54 denar (MKD). Çeviriniz:
a) 250 dolar kaç denardır? b) 3200 denar kaç dolardır?

Bir para biriminden diğerine dönüşüm, basit üçlü kuralın uygulanması ile yapılabilir. Bir para biriminde daha büyük bir değer için, diğer para biriminde de daha büyük bir değer elde edildiğinden, büyüklükler doğru orantılıdır. Bu nedenle, şemadaki oklar aynı yöndedir:

a)

↑ 1 dolar	↑ 57 denar
250 dolar	x denar

Şemaya göre orantıyı kurarız.

$x : 57 = 250 : 1$ buradan da şu sonucu çıkarırız:

$x = 57 \cdot 250 = 14\,250$ denar.

b)

↑ 57 denar	↑ 1 dolar
3200 denar	x dolar

Buradan buluruz ki:

$x : 1 = 3200 : 57$ buradan da şu sonucu çıkarırız:

$x = \frac{3200}{57} = 56{,}14$ dolar.

Not: Elde edilen yabancı para birimi değerleri iki ondalık basamağa, Makedon para birimi değerleri ise tam sayıya yuvarlanır.

SORU 3

Aşağıdaki tabloda verilen döviz kuru listesine göre hesapla ve sorulara cevap ver:

Döviz	Kısaltma	1 birimin değeri
Euro	EUR	62 denar
Amerikan Doları	USD	57 denar
İngiliz Sterlini	GBP	75 denar
İsviçre Frangı	CHF	67 denar

a) Eğer ABD'ye seyahat ediyorsan ve 20 000 denarın varsa, kaç Amerikan doları alırsın?
b) 15 000 denarın varsa, Almanya'da 220 avro fiyatındaki saati alabilir misin?
c) Birleşik Krallık'ta 95 sterlin fiyatında bir ceket hoşuna gitti. Bu ceketi almak için kaç denar bozdurmalısın?
d) İsviçre'de bir kayak merkezinde ski kartı 150 İsviçre frangı tutmaktadır. Bu tutarı denara çevir.

SORU 4

Matey, 200 Avustralya doları (AUD) tutarını Makedon denarına (MKD) çevirmek istemektedir.
30 Avustralya doları komisyon ödemelidir ve kalan miktarı şu kur üzerinden bozdurur:
1 AUD = 34,91 MKD. Matey kaç denar alacaktır?

Bileşik Üçlü Kural

Uygulamada sık sık üç veya daha fazla orantılı büyüklük içeren problemlere rastlanır.
Yani, üç veya daha fazla büyüklüğün değerleri verildiğinde, karşılık gelen bilinmeyen değer **bileşik üçlü kural** ile belirlenir.
Bileşik üçlü kural için, bilinmeyen büyüklüğü hesaplamak üzere oran şemasını kurarken kullanılan kurallar aynıdır. Bu şemaya göre orantılar düzenlenir ve hesaplama yapılır.

ÖRNEK 4

1600 metre uzunluğunda, 4 metre genişliğinde ve 6 metre yüksekliğinde bir tünelin yapımı için 640 000 avro harcanmıştır. Aynı şartlarda, 1000 metre uzunluğunda, 6 metre genişliğinde ve 8 metre yüksekliğinde bir tünelin yapımı için kaç avro gereklidir?

Tünelin yapımı için kullanılan tüm büyüklükler – uzunluk, genişlik, yükseklik ve harcama – birbirleriyle doğru orantılıdır. Bu nedenle şemadaki tüm oklar aynı yöndedir:

↑1600 m uzun	↑4 m geniş	↑6 m yüksek	↑640 000 avro
1000 m uzun	6 m geniş	8 m yüksek	x avro

Okların yönüne göre şu oran çıkar: $x = \frac{640\,000(1000 \cdot 6 \cdot 8)}{1600 \cdot 4 \cdot 6} = 800\,000$ avro.

Yani, 1000 metre uzunluğunda, 6 metre genişliğinde ve 8 metre yüksekliğinde bir tünelin yapımı için, aynı şartlarda 800 000 avro gereklidir.

SORU 5

Eğer 4 robot 3 saatte 120 oyuncak monte ederse, 6 robot 5 saatte kaç oyuncak monte eder?

ÖRNEK 5

20 işçiden oluşan bir grup, günde 8 saat çalışarak 5 gün boyunca 20 000 kilogram şeftali toplamıştır. Günde 5 saat çalışacak 30 işçiden oluşan bir grubun 60 000 kilogram şeftali toplaması için kaç gün gereklidir?

İlk çizilen ok her zaman x'ten başlar ve yukarı yönelir. Sonra şunu gözlemleriz ki, eğer 20 işçi işi 5 günde bitirdiyse, 30 işçi işi daha az günde bitirecektir (ters orantılı büyüklükler).

Ayrıca, eğer günde 8 saat çalışırlarsa iş 5 günde biter, günde 5 saat çalışırlarsa iş daha fazla günde biter (ters orantılı büyüklükler).

Son olarak, 20 000 kilogram şeftali 5 günde toplanmışsa, 60 000 kilogram şeftali daha fazla günde toplanacaktır (doğru orantılı büyüklükler).

20 işçi	5 gün	8 saat	20 000 kilogram
30 işçi	x gün	5 saat	60 000 kilogram

Okların yönüne göre şu sonuç çıkar ki $x = \dfrac{5 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 60\,000}{30 \cdot 5 \cdot 20\,000} = 16$ gün.

Demek ki, günde 5 saat çalışacak 30 işçiden oluşan bir grubun 60 000 kilogram şeftali toplaması için 16 gün gereklidir.

SORU 6

Eğer 6 makine 1200 kilovat gücünde olup belirli bir işi 8 günde bitirebiliyorsa, aynı işi 4 makinenin 6 günde bitirebilmesi için makinelerin gücü kaç kilovat olmalıdır?

ARAŞTIRMA

Ailenle birlikte Almanya, Kanada, Yeni Zelanda ve Japonya'ya seyahat etmeniz gerekiyor. Bütçeniz 750 000 denardır.

a) Seyahat için bir plan yap ve her ülkenin para biriminde (avro, Kanada doları, Yeni Zelanda doları ve Japon yeni) giderleri öngör. Plana şunları dahil et: uçak biletleri, konaklama, yiyecek, müze girişleri, eğlence parkları ve diğer masraflar.

b) İnternet üzerinden araştırma yap ve denar ile her bir ülkenin para birimi arasındaki döviz kurunu bul.

c) Her ülke için toplam giderleri denar cinsinden hesapla.

d) Her ülkenin para biriminde giderleri ve denara çevrilmiş giderleri gösteren bir tablo hazırla.

e) Hesaplamana göre, mevcut bütçeniz dört ülkeye seyahat için yeterli midir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. 20 kilogram şeker pancarından 1,5 kilogram şeker elde edilmektedir. 768 kilogram şeker pancarından kaç kilogram şeker elde edilir?

2. Bir iş günü içinde 4 işçi 12 metre uzunluğunda kanal kazmıştır. Aynı sürede 18 metre uzunluğunda kanal kazmak için kaç işçi gereklidir?

3. Altı aynı boru bir havuzu 4,5 saatte doldurur. Aynı havuzu 5 böyle boru kaç saatte dolduracaktır?
4. Bir dolu su fıçısıyla 0,75 litrelik 24 şişe doldurulabilir. Aynı dolu fıçıdan 1 litrelik kaç şişe doldurulabilir?
5. Makedon denarı (MKD) ile Hırvat kunası (HRK) kuru 1 MKD = 8 HRK'dir.
   a) 3750 denar karşılığında kaç kuna alınacaktır?
   b) 200 Hırvat kunası karşılığında kaç denar alınacaktır?
6. Altı güneş paneli 5 saatte 90 kW·h elektrik enerjisi üretir. 10 panel 8 saatte ne kadar elektrik enerjisi üretecektir?
7. Dört makine 6 saat çalışıp 1200 otomobil parçası üretir. 6 makine 8 saatte kaç otomobil parçası üretecektir?
8. Aynı çapa sahip altı boru, basınç 12 bar iken bir depoyu 8 dakikada boşaltabilir. Aynı depo, 4 boru devreye alınırsa fakat basınç 18 bar olursa ne kadar sürede boşalacaktır?
9. Dört sensör 5 volt gerilimde 12 saniyede etkinleşir. 8 sensör 10 volt gerilimde ne kadar sürede etkinleşecektir?

1.13. Paylaştırma Hesabı

ETKİNLİK

Üç arkadaş öğle yemeği için 1500 denar ödemiştir. Her biri kaç denar ödemelidir?

Uygulamada sıkça, belirli bir büyüklüğün veya bütünün önceden verilen sayılara **doğru orantılı** veya **ters orantılı** olarak bölünmesi gereken problemlere rastlanır. Buna göre, doğru orantılı bölme ve ters orantılı bölme olarak ayrım yaparız.

ÖRNEK 1

Bir bilimsel araştırma projesinde 150 000 denarlık bir ücret iki işbirlikçi arasında 2 : 3 oranında bölüştürülmektedir. Her işbirlikçi kaç denar alacaktır?

Ücretleri x ve y ile gösterelim. Bölüşüm koşuluna göre $x : y = 2 : 3$.

Oranların özelliklerini uygulayarak $x = 2k$ ve $y = 3k$ elde ederiz.

Toplam ücret için: $2k + 3k = 150\,000$, $5k = 150\,000$, $k = 30\,000$.

Buradan $x = 2k = 2 \cdot 30\,000 = 60\,000$ ve $y = 3k = 3 \cdot 30\,000 = 90\,000$ bulunur.

Yani, bir işbirlikçi 60 000 denar, diğeri ise 90 000 denar alacaktır.

SORU 1

İki bütünleyici açının (α ve β) ölçüleri 2 : 7 oranındadır. Bu açıların ölçüleri kaç derecedir?

ÖRNEK 2

Sayımız 370'i 2, 3 ve 5 sayılarıyla orantılı olacak şekilde üç parçaya ayıralım.

370 sayısı 2 : 3 : 5 oranında üç parçaya bölünecektir.

Bu parçaları x, y ve z ile gösterirsek $x : y : z = 2 : 3 : 5$ olur. Buradan $x = 2k$, $y = 3k$ ve $z = 5k$.

Toplam için: $x + y + z = 370 \Longrightarrow 2k + 3k + 5k = 370 \Longrightarrow 10k = 370 \Longrightarrow k = 37$.

Buradan $x = 2k = 2 \cdot 37 = 74$, $y = 3k = 3 \cdot 37 = 111$ ve $z = 5k = 5 \cdot 37 = 185$ bulunur.

Birinci parça 74, ikinci parça 111 ve üçüncü parça 185'tir.

SORU 2

Bir bilgisayarda 18 gigabayt boş RAM belleği vardır ve bu bellek üç uygulama arasında 2 : 3 : 4 oranında paylaşılacaktır. Her uygulama kaç gigabayt RAM belleği alacaktır?

ÖRNEK 3

540 kilometrelik bir yol, $\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ ve $\frac{3}{4}$ sayılarına doğru orantılı olacak şekilde dört parçaya ayrılmalıdır.

Yol, $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ oranında dört parçaya bölünmelidir.

Bu parçaları x, y, z ve w ile gösterelim. Orantıya göre: $x = \frac{2}{3}k, y = 1\frac{1}{2}k, z = \frac{5}{6}k$ ve $w = \frac{3}{4}k$.

Toplam: $x + y + z + w = 540 \Longrightarrow \frac{2}{3}k + 1\frac{1}{2}k + \frac{5}{6}k + \frac{3}{4}k = 540$.

Paydaları eşitleyince: $\frac{45}{12}k = 540 \Longrightarrow k = 144$.

Buna göre parçalar: $x = \frac{2}{3}k = \frac{2}{3} \cdot 144 = 96$, $y = 1\frac{1}{2}k = \frac{3}{2}k = \frac{3}{2} \cdot 144 = 216$, $z = \frac{5}{6}k = \frac{5}{6} \cdot 144 = 120$

ve $w = \frac{3}{4}k = \frac{3}{4} \cdot 144 = 108$

Yani, yolun ilk bölümü 96 km, ikincisi 216 km, üçüncüsü 120 km ve dördüncüsü 108 km uzunluğundadır.

SORU 3

Bir hane bir ayda 90 kWh elektrik enerjisi tüketmiştir. Bunun $\frac{2}{3}$'ü ısınma için, $\frac{1}{6}$'sı aydınlatma için, geri kalanı ise elektrikli cihazların çalışması için harcanmıştır.
Her bir kullanım için kaç kilovat-saat elektrik enerjisi tüketilmiştir?

ÖRNEK 4

630 mililitre hacminde bir kimyasal çözelti üç laboratuvara bölünmüştür. Birinci ve ikinci laboratuvara bölünen çözelti miktarları 5 : 6 oranında, ikinci ve üçüncü laboratuvara bölünen çözelti miktarları ise 2 : 3 oranındadır. Her laboratuvar kaç mililitre çözelti alacaktır?

Çözelti miktarlarını birinci, ikinci ve üçüncü laboratuvara ayrılanlar olarak x, y ve z ile gösterelim. Problemin koşuluna göre: $x : y = 5 : 6$, $y : z = 2 : 3$ ve $x + y + z = 630$.

İlk ve ikinci oranları öyle dönüştürmeliyiz ki, her iki oranda y aynı sayıya karşılık gelsin. EKOK(6, 2) = 6 olduğundan, $x : y = 5 : 6$, $y : z = 6 : 9$ elde ederiz.

Buradan uzatılmış orantıyı buluruz: $x : y : z = 5 : 6 : 9$.

Buna göre: $x = 5k$, $y = 6k$ ve $z = 9k$.

Toplam: $5k + 6k + 9k = 630 \Longrightarrow 20k = 630 \Longrightarrow k = 31{,}5$.

Böylece: $x = 5 \cdot 31{,}5 = 157{,}5$; $y = 6 \cdot 31{,}5 = 189$ ve $z = 9 \cdot 31{,}5 = 283{,}5$.

Sonuç olarak, birinci laboratuvar 157,5 ml çözelti, ikinci laboratuvar 189 ml çözelti ve üçüncü laboratuvar 283,5 ml çözelti almıştır.

SORU 4

Üç işçi toplamda 257 845 denar kazanmıştır. Her biri ne kadar alacaktır, eğer: birinci ve ikinci işçinin payları 4 : 5 oranında, üçüncü ve birinci işçinin payları 2 : 3 oranındaysa?

ÖRNEK 5

Andrey, Yusuf ve Ivan'ın yaşları sırasıyla 5, 8 ve 12'dir. Onlar 122 500 denarlık bir miktarı yaşlarına ters orantılı olacak şekilde paylaşmışlardır. Her biri ne kadar almıştır?

122 500 denarlık miktar üç parçaya bölünmelidir ve oran $\frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$ olacaktır.

Payları x, y ve z ile gösterirsek: $x : y : z = 24 : 15 : 10$.

Buna göre: $x = 24k$, $y = 15k$ ve $z = 10k$.

Toplam: $x + y + z = 122\,500 \Longrightarrow 24k + 15k + 10k = 122\,500 \Longrightarrow 49k = 122\,500 \Longrightarrow k = 2500$.

Böylece: $x = 24 \cdot 2500 = 60\,000$, $y = 15 \cdot 2500 = 37\,500$, $z = 10 \cdot 2500 = 25\,000$.

Sonuç olarak, Andrey 60 000 denar, Yusuf 37 500 denar ve Ivan 25 000 denar almıştır.

SORU 5

Üç belediye ortak bir spor sahası inşa etmiştir. İnşaat maliyeti 25 800 000 denardır. Belediyelerden biri spor sahasından 3 km, diğeri 4 km, üçüncüsü ise 7,5 km uzaklıktadır.
Maliyet, sahaya olan uzaklıklarına ters orantılı olarak paylaşılmıştır. Her belediye ne kadar ödemiştir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Sayı 1860'ı üç parçaya ayır:
   a) 2, 3 ve 5 sayılarıyla doğru orantılı olacak şekilde, b) 2, 3 ve 5 sayılarıyla ters orantılı olacak şekilde.

2. Bir tür pirinç (bronz) alaşımı bakır, çinko ve kurşundan oluşmaktadır ve oranları 65 : 34 : 3'tür. Toplam kütlesi 456 kg olan bu alaşımda her metalin kütlesi ne kadardır?

3. 27 200 denarlık miktar, yaşları 20, 32 ve 40 olan üç kişiye yaşlarıyla doğru orantılı olarak bölüştürülsün. Her biri kaç denar alacaktır?

4. 1 092 000 denarlık miktar üç şirkete öyle bölüştürülsün ki, her sonraki şirket bir öncekinden %20 daha fazla alsın. Her şirket kaç denar alacaktır?

5. 135 500 denarlık miktar üç kişiye öyle bölüştürülsün ki, her sonraki kişi bir öncekinden %10 daha az alsın. Her kişi kaç denar alacaktır?

6. 1080 sayısını $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ oranında üç parçaya ayırın.

7. Maria, aile yemeği hazırlığı için 2820 denar harcamıştır. Çorba, ana yemek ve salata için harcamalar $5 : 8\frac{1}{3} : 6{,}25$ oranındadır. Çorba, ana yemek ve salata için yapılan harcamaları hesaplayın.

8. Ulusal matematik yarışmasında Bojan 85 puanla beşinci, Majlinda 81 puanla altıncı, Marko ise 77 puanla yedinci olmuştur. Komite, 33 200 denarı alınan puanlarla doğru orantılı olarak dağıtmaya karar vermiştir. Her öğrenci ne kadar para ödülü almıştır?

9. Bir okula, çatıda, çitte ve spor salonunda yapılacak inşaat işleri için 15 600 avro bağışlanmıştır. Çatı ve çit için bağışlanan miktarların oranı 4 : 5, çit ve spor salonu için bağışlanan miktarların oranı ise 6 : 7'dir. Her bir inşaat işi için ne kadar bağış yapılmıştır?

1.14. Karışım Hesabı

ETKİNLİK

Bir markette peynirin fiyatı kilogramı 660 denar, diğer markette 680 denar, üçüncü markette ise 720 denardır.

Peynirin ortalama kilogram fiyatı ne kadardır?

Karışım hesabı, iki veya daha fazla çeşit mal karıştırıldığında belirli özelliklere sahip yeni bir çeşit elde edildiğinde kullanılır. Mallar karıştırıldığında, eğer karışan malların fiyatları ve karışımın fiyatı biliniyorsa, malların hangi oranda karıştırılması gerektiği belirlenebilir. Farklı kalitelerde malların karıştırılmasındaki temel ilke şudur: Karışım satıldığında elde edilen toplam değer, mallar ayrı ayrı kendi fiyatlarından satıldığında elde edilecek toplam değere eşit olmalıdır.

ÖRNEK 1

Farklı kalitelerde mallar verilmiştir: birinin fiyatı kilogramı 48 denar, diğerinin fiyatı kilogramı 30 denardır. Pazarda, kilogramı 40 denardan satılacak yeni kalitede 360 kilogram mal istenmektedir. Her iki maldan kaçar kilogram alınmalıdır?

Aranan miktarı, kilogramı 48 denardan satılan mal için x, kilogramı 30 denardan satılan mal için y ile gösterelim. Buna göre denklem:

$48x + 30y = 40(x + y)$
$48x - 40x = 40y - 30y$
$8x = 10y$
$x : y = 10 : 8$

Bu, 10 kg x malının 8 kg y malı ile karıştırılması gerektiği anlamına gelir.

Oran özelliklerini kullanarak: $x = 10k$ ve $y = 8k$.

Koşula göre: $10k + 8k = 360 \Longrightarrow 18k = 360 \Longrightarrow k = 20$.

Böylece: $x = 10 \cdot 20 = 200$ ve $y = 8 \cdot 20 = 160$.

Sonuç olarak, kilogramı 48 denar olan maldan 200 kg ve kilogramı 30 denar olan maldan 160 kg alınmalıdır.

ÖRNEK 2

Kaç gram altın alınmalıdır? Altın eşyaların biri %80, diğeri %90 saflıkta olup, 115 gram %86 saflıkta altın elde edilmek isteniyor.

Aranan miktarı, %80 saflıkta olan altından alınacak miktar için x, %90 saflıkta olan altından alınacak miktar için y ile gösterelim. Buna göre denklem:

$$\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}y = \frac{86}{100}(x + y)$$
$$80x + 90y = 86(x + y)$$
$$80x - 86x = 86y - 90y$$
$$6x = 4y$$
$$x : y = 4 : 6$$ Buradan orantı özellikleriyle

Yani $x = 4k$ ve $y = 6k$.

Koşula göre: $4k + 6k = 115$, $10k = 115$, $k = 11{,}5$.

Böylece: $x = 4k = 4 \cdot 11{,}5 = 46$ ve $y = 6k = 6 \cdot 11{,}5 = 69$.

Sonuç olarak, %80 saflıkta altından 46 gram, %90 saflıkta altından 69 gram alınmalıdır.

SORU 1

Bir bitkisel eczanede papatya çayı kilogramı 75 denardan ve nane çayı kilogramı 55 denardan satılmaktadır. Eczanenin ihtiyaçları için iki tür çayın karışımı yapılmıştır. Kilogramı 68 denardan satılacak 120 kilogram karışım elde etmek için her çaydan kaç kilogram alınmalıdır?

ÖRNEK 3

Kilogramı 40, 44 ve 50 denardan satılan üç kalite mal verilsin. Bu üç kalite malın karıştırılmasıyla, kilogramı ... satılacak 480 kilogram mal elde edilmelidir.

Her kilogramı 45 denara olacak şekilde ve ilk iki kaliteden eşit miktarlarda olacak şekilde mallar bulunmalıdır. Her bir maldan kaç kilogram alınmalıdır?

Aranan miktarları, kilogram başına 40, 44 ve 50 denar fiyatıyla satılan mallar için sırasıyla x, y ve z ile gösterelim. O zaman:

$40x + 44y + 50z = 45(x + y + z)$
$40x + 44y + 50z = 45x + 45y + 45z$
$5z = 5x + y$

Görevdeki koşul gereği, ilk iki kaliteden eşit miktarda mal alınacağı için $x = y$ alıyoruz. Böylece:

$5z = 6y$ ve $5z = 6x$ Bundan: $z : y = 6 : 5$ ve $z : x = 6 : 5$

elde edilir. Böylece genişletilmiş orantı: $x : y : z = 5 : 5 : 6$

Orantının özelliklerini uygulayarak: $x = 5k, y = 5k, z = 6k$

Bulunacak toplam miktardan: $5k + 5k + 6k = 480 \Rightarrow 16k = 480 \Rightarrow k = 30$

Sonuç olarak: $x = 5k = 150, y = 5k = 150, z = 6k = 180$

Buna göre, kilogram başına 40 denara satılan maldan 150 kg, kilogram başına 44 denara satılan maldan 150 kg ve kilogram başına 50 denara satılan maldan 180 kg alınmalıdır.

ÖRNEK 4

%75, %25 ve %15'lik asetik asidin sulu çözeltileri verilmiş olsun. Üç sulu çözeltinin karıştırılmasıyla %35 derişime sahip 98 litre sulu çözelti asetik asitten elde edilmelidir ve ayrıca %75 ve %25 sulu çözeltiden eşit miktar olmalıdır. Her bir sulu çözeltiden kaç litre alınmalıdır?

Aranan miktarları, sırasıyla %75, %25 ve %15 derişime sahip sulu çözeltiler için x, y ve z ile gösterelim. O zaman:

$$\frac{75}{100}x + \frac{25}{100}y + \frac{15}{100}z = \frac{35}{100}(x + y + z)$$
$$75x + 25y + 15z = 35x + 35y + 35z$$
$$2z = 4x - y$$

koşul gereği, ilk iki sulu çözeltiden eşit miktar olması için $x = y$ alıyoruz. Böylece elde ediyoruz:

$2z = 3y$ ve $2z = 3x$, bu da demektir ki $z : y = 3 : 2$ ve $z : x = 3 : 2$

Buradan genişletilmiş orantıyı elde ediyoruz: $x : y : z = 2 : 2 : 3$

Genişletilmiş orantının özelliklerinin uygulanmasıyla: $x = 2k, y = 2k, z = 3k$

Aranan sulu çözeltinin miktarı için koşuldan: $2k + 2k + 3k = 98, 7k = 98, k = 14$

Buradan buluyoruz: $x = 2k = 2 \cdot 14 = 28$, $y = 2k = 2 \cdot 14 = 28$ ve $z = 3k = 3 \cdot 14 = 42$.

Buna göre, %35 derişime sahip 98 litre sulu çözelti asetik asitten elde edilmesi için %75 sulu çözeltiden 28 litre, %25 sulu çözeltiden 28 litre ve %15 sulu çözeltiden 42 litre karıştırılmalıdır.

SORU 2

On iki litre %20 alkol çözeltisi, on beş litre %15 alkol çözeltisi ve on litre %25 alkol çözeltisiyle karıştırılıyor. Yüzde kaçlık alkol çözeltisi elde edilir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir okulda erkeklerin ortalama ağırlığı 54 kilogram, kızların ise 48 kilogramdır. Ortalama ağırlığı 51,6 kilogram olan 30 öğrencilik bir sınıfta erkek ve kız sayısını bul.
2. Kilogramı 180 ve 250 denar olan iki çeşit bezelye karıştırılarak kilogramı 200 denar olan bezelye elde edilecektir. İstenen fiyata sahip bir karışım elde etmek için iki çeşit hangi oranda karıştırılmalıdır?
3. 52 litre %70 alkol çözeltisi elde etmek için kaç litre %40 alkol çözeltisini %100 alkol ile karıştırmalıyız?
4. Bir kapta 90°C'ye ısıtılmış 10 litre su, 72°C'ye ısıtılmış 14 litre su ve 45°C'ye ısıtılmış 20 litre su karıştırılıyor. Elde edilen karışımın sıcaklığı kaçtır?
5. Bir kuyumcu %60 saflıkta gümüş ile %90 saflıkta gümüşü karıştırarak %85 saflıkta 600 g gümüş elde ediyor. Her bir tür gümüşten kaç gram almalıdır?
6. Kilogramı 180 ve 250 denar olan iki çeşit fasulye karıştırılarak kilogramı 200 denar olan fasulye elde edilecektir. İstenen fiyata sahip bir karışım elde etmek için iki çeşit hangi oranda karıştırılmalıdır?
7. Bir dükkânda üç çeşit kahve vardır: kilogramı 25 denar olan 5 kilogram, kilogramı 30 denar olan 7 kilogram ve kilogramı 35 denar olan 6 kilogram. Üç çeşidin karıştırılmasıyla elde edilecek kahvenin fiyatı ne olacaktır?
8. Üç tür alkol çözeltisi karıştırılıyor: %45 dereceli 5 litre, %33 dereceli 8 litre ve %20 dereceli 15 litre. Elde edilen çözeltinin derecesi kaçtır?

1.15. Faiz Hesabı

Maaşlar ve maaş ek ödemeleri, emekli maaşları, tasarruflar çoğu zaman vatandaşların belirli bir süre için bankaya devrettiği parasal araçlardır. Aynı şekilde, vatandaşların çoğu zaman belirli bir süre için bankadan parasal kaynak borç alma ihtiyacı da olur. Her iki durumda da, parasal araçların kullanımı için belirli bir yüzde ödeir. Eğer para bankaya yatırılıyorsa, banka borçlu, yatırımcı ise alacaklıdır. Eğer kredi çekiliyorsa, o zaman banka alacaklı, kredi kullanıcısı ise borçlu olur.

Faiz, yatırılan ya da borç alınan paranın yüzdesel tutarını, yani borçlunun alacaklıya ödediği parasal karşılığı temsil eder; bu, borç alınan paranın kullanım bedelidir. Faiz günlük, aylık, yıllık vb. şekilde hesaplanabilir. Biz yıllık faiz oranı ile hesaplama yapacağız.Yatırılan veya borç alınan tutara **anapara** veya **temel değer** denir.

Paranın yatırıldığı ya da borç alındığı süre ise faizin hesaplandığı zaman dilimidir.

Faizin, birim zamanda elde edilen tutarı anaparaya orantılıdır, yani anaparanın belirli bir yüzdesini oluşturur; buna **faiz oranı** denir.

Faizin hesaplanma yöntemine göre iki tür faiz hesabı ayırt edilir: **basit faiz hesabı** ve **bileşik faiz hesabı**.

BASİT FAİZ HESABI

ETKİNLİK

Ilina, Dimitar'a 10 000 denar borç vermiştir. Anlaşmaya göre Dimitar borcu 1 yıl içinde geri ödeyecek ve karşılık olarak ödünç aldığı paranın üzerine ek olarak %15 ödeyecektir.

Dimitar, Ilina'ya ne kadar para geri ödemelidir?

Varsayalım ki 30 000 denarı %4 basit faiz oranıyla 5 yıl süreyle yatırmışız.
Her yıl yatırılan 30 000 denarın %4'ünü alacağız, yani:

$30\,000 = \frac{4}{100} \cdot 30\,000$ Böylece 5 yıl için faiz: $\frac{4}{100} \cdot 30\,000 \cdot 5 = 6000$ denar

Faizi i ile gösteriyoruz ve şu formülle hesaplıyoruz: $i = \frac{Kpt}{100}$ burada K anapara, p faiz oranı, t ise parayı yatırdığımız süredir.

ÖRNEK 1

Yusuf 200 000 denarı bankaya 3 yıllığına yatırmış ve 18 000 denar faiz almıştır.
Basit faiz oranını hesapla.

Problemin koşuluna göre anapara $K = 200\,000$ denar, süre $t = 3$ yıl ve faiz $i = 18\,000$ denardır.

Faizi hesaplama formülüne göre:

$$18\,000 = \frac{200\,000 \cdot p \cdot 3}{100}$$

$$18\,000 = 6000 \cdot p$$

$$p = 3\%.$$

Örneklere bakıldığında görülebileceği gibi, basit faiz yalnızca anapara üzerinden hesaplanır.

SORU 1

a) 34 500 denarlık bir sermaye, %8 faiz oranıyla bankaya 4 yıl yatırıldığında ne kadar faiz getirecektir?

b) %5 faiz oranıyla 8 yıl içinde 9600 denar faiz getirecek yatırılan miktar ne kadardır?

c) 54 000 denarlık bir sermaye, %6 faiz oranıyla 6480 denar faiz ödemesi yapması için bankada kaç yıl yatırılmalıdır?

Bileşik Faiz Hesabi

Eğer belirli bir süre için anaparanın getirdiği faizi anaparaya eklersek, böylece faizin de faiz getirmesi sağlanırsa, buna bileşik faiz hesabı denir. Eğer 2000 denarı %3 bileşik faiz oranıyla yatırırsak, yıl sonunda faiz 2000 denarın %3'ü olacaktır, yani: $\frac{3}{100} \cdot 2000 = 60$ denar

Demek ki, ilk yılın sonunda $2000 + 60 = 2060$ denarımız olacaktır.

İkinci yıl sonunda 2060 denarın %3'ü kadar faiz alacağız: $\frac{3}{100} \cdot 2060 = 61{,}80$ denar

İkinci yılın sonunda $2060 + 61{,}80 = 2121{,}80$ denarımız olacaktır.

Üçüncü yıl sonunda 2121,80'in %3'ü kadar faiz alacağız, bu da 63,65 denardır, yani toplam miktar 2185,45 denar olacaktır. Elde edilen faiz ise 185,45 denar yani tam sayıya yuvarlandığında 185 denardır.

ÖRNEK 2

Kristina 10 000 denarı %10 bileşik faiz oranıyla yatırmıştır. Kristina üç yıl sonra ne kadar parası olacaktır?

Problemin koşullarına göre K = 10 000 denar, p = %10 ve t = 3 yıldır. İlk yılın sonunda faiz:

$i = \frac{Kpt}{100} = \frac{10000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1000$ denar

İkinci yıl faizlendirilecek değer: $10\,000 + 1000 = 11\,000$

İkinci yılın sonunda faiz: $\frac{11000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1100$ denar

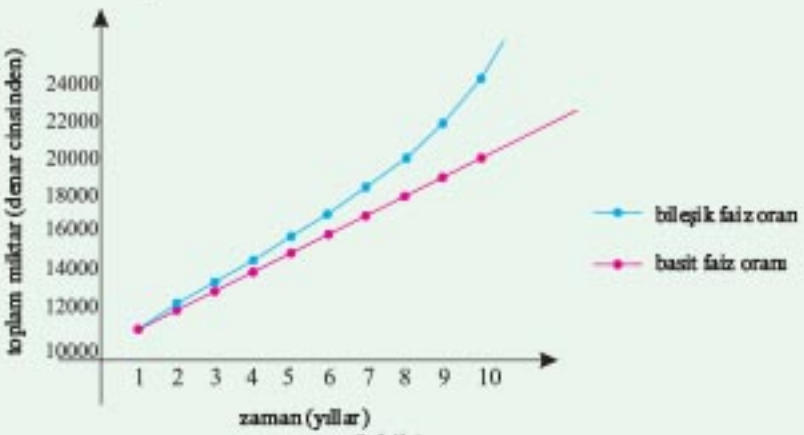
Üçüncü yıl faizlendirilecek değer: $11\,000 + 1100 = 12\,100$

Üçüncü yılın sonunda faiz: $\frac{12100 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1210$ denar

Üçüncü yılın sonunda toplam miktar: $12\,100 + 1210 = 13\,310$ denar

Yani, 3 yıl sonra Kristina toplam 13 310 denar çekebilecektir.

Şekil 1'de, 10 000 denarlık yatırılan miktarın %10 basit ve bileşik faiz oranıyla artışlarının karşılaştırması verilmiştir. Anapara, faiz oranı ve süre aynı olduğunda, bileşik faiz oranıyla hesaplanan anapara değeri, basit faiz oranıyla hesaplanan anapara değerinden daha büyük olacaktır.



Şekil 1

İstisna, faiz tutarının yalnızca bir yıl için hesaplandığı durumdur; bu durumda bileşik faiz oranı ile basit faiz oranıyla elde edilen değerler eşit olur.

ETKİNLİK

Bileşik faiz oranıyla elde edilen anapara değerini belirlemek için birçok hesaplama gereklidir. Ancak daha hızlı bir yol da vardır. Aşağıdaki tablonun üçüncü sütunundaki hesaplamaları incele ve açıkla:

Yıl	%10 bileşik faiz oranıyla her yıl sonunda hesaplanan anapara değeri	Çarpan kullanılarak hesaplanan anapara değeri
1	11 000	$10\,000 \cdot (100\% + 10\%) = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1) = 10\,000 \cdot (1{,}1)^1 = 11\,000$
2	12 100	$10\,000 \cdot (1{,}1)^2 = 12\,100$
3	13 310	$10\,000 \cdot (1{,}1)^3 = 13\,310$
4	14 641	$10\,000 \cdot (1{,}1)^4 = 14\,641$

Anaparanın bileşik faiz oranıyla değerini şu formülle hesaplarız:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

K_n anaparanın elde edilen değeri, K anapara, p faiz oranı ve n yıl sayısıdır.

ÖRNEK 3

15 000 denar %5 bileşik faiz oranıyla yatırılmıştır. 6 yıl sonra ne kadar tutar elde edilecektir?

Problemin koşullarına göre $K = 15\,000$ denar, $p = \%5$, $n = 6$ yıldır.

Anapara değerini hesaplama formülünden elde ederiz:

$K_6 = K\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 15\,000 \cdot 1{,}05^6$ Hesap makinesiyle hesaplıyoruz.

$= 15\,000 \cdot 1{,}3401 = 20\,101{,}5$ denar Sonucu 4 ondalık basamağa yuvarlıyoruz.

6 yıl sonra elde edilecek tutar 20 102 denar olacaktır (tam sayıya yuvarlandığında).

SORU 2

%4 bileşik faiz oranıyla para yatırılmıştır. 7 yıl sonra 30 000 denara yükselmiştir. Başlangıçta yatırılan miktar ne kadardır?

Farklı Faizlendirme Dönemleriyle Bileşik Faiz Hesabı

Çoğu zaman faizlendirme bir yıldan daha kısa dönemler için yapılır. Faizlendirme aylık, üç aylık (çeyreklik), altı aylık (yarıyıllık veya dönemlik) vb. olabilir.

Farklı faizlendirme dönemiyle değeri hesaplamak için şu formülü kullanırız: $K_{m,n}$ anaparanın elde edilen değeri n yıl için,

$$K_{m,n} = K\left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$$

K anapara, p faiz oranı, m yıllık faizlendirme sayısı ve n yıl sayısıdır.

ÖRNEK 4

100 000 denar %3 bileşik faiz oranıyla 9 yıl süreyle yatırılırsa, faizlendirme yarıyıllık yapılırsa ne kadar tutar elde edilir?

Burada $K = 100\,000$ denar, $p = \%3$, $n = 9$ yıl ve $m = 2$'dir.

Anapara değerini hesaplama formülünden elde ederiz:

$$K_{2,0} = 100\,000\left(1 + \frac{3}{100 \cdot 2}\right)^{2 \cdot 9} = 100\,000 \cdot 1{,}015^{18} = 130\,734{,}6 \text{ denar.}$$

9 yıl sonra elde edilecek tutar 130 734 denar olacaktır (tam sayıya yuvarlandığında

SORU 3

130 000 denar, %9 bileşik faiz oranıyla 2 yıl süreyle yatırılırsa, faizlendirme üç aylık (çeyreklik) yapılırsa ne kadar tutar elde edilir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir bankada basit faiz oranı %12'dir. 3 yılın sonunda 5000 denarlık tasarruf mevduatı için ödenecek faiz tutarı ne olacaktır?
2. Şenol %3 basit faiz oranıyla 150 000 denar yatırmıştır. Birkaç yıl sonra başlangıç tutarı 177 000 denara yükselmiştir. Parayı bankaya kaç yıl yatırmıştır?
3. Hana yeni mutfağını döşemek için 2000 euro kredi talep etmiştir. Banka %3 basit faiz oranı belirlemiştir. 3 yıl sonra bankaya toplam ne kadar para geri ödemelidir?
4. %4 bileşik faiz oranıyla 10 yıl için 40 000 euroluk konut kredisi için toplam borcu hesapla.
5. %12 faiz oranıyla iki yıl süreyle 80 000 denar kredi çekilmiştir. Hesaplama şu şekilde yapılırsa toplam ne kadar geri ödenmelidir:
   a) basit faiz oranı b) bileşik faiz oranı?
6. Dino 3 yıl için 360 000 denar kredi almalıdır. %3,5 bileşik faiz oranıyla kredi alabilir veya %3,7 basit faiz oranıyla kredi alabilir. Hangi seçimle daha az faiz öder?
7. Aşağıdaki yatırımlar için hangi tutar elde edilir:
   a) %7 bileşik faiz oranı ve yarıyıllık faizlendirme ile 3 yıl için 73 000 denar?
   b) %4 bileşik faiz oranı ve üç aylık faizlendirme ile 5 yıl için 10 300 denar?
   c) %5 bileşik faiz oranı ve aylık faizlendirme ile 10 yıl için 15 000 denar?
8. Bir kredi kartındaki 35 000 denarlık borç için 2 yıl sonra ne kadar ödenmelidir, bileşik faiz oranı:
   a) %13,5 ve yıllık hesaplanırsa b) %13,5 ve yarıyıllık hesaplanırsa?
9. Uroş tasarrufunu altı ayda bir hesaplanan %6 bileşik faiz oranına sahip bir hesaba yatırmıştır. Bu hesaba 63 000 denar yatırdıysa, iki yıl sonra kaç denarı olacaktır?

ARAŞTIRMA

Problemi çöz: "10 000 avro kredi".

a) İnternette araştırma yap, ülkedeki bankaların sunduğu kredi türleri ve faiz oranları hakkında bilgi topla.

b) 10 000 avro kredi çekmek için en avantajlı bankayı belirle.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN SORULAR

1. Küme boş mudur:
   a) $B = \{x \mid x$ asal çift sayıdır$\}$
   b) $C = \{x \mid x$ Güney Kutbu'nun güneyinde bulunan bir devlettir$\}$
   c) $D = \{x \mid x$ iki konkav açılı bir dörtgendir$\}$

2. Standart bir iskambil destesindeki renklerin altkümeleri verilmiştir:
   $A = \{$karo, maça, sinek, kupa$\}$, $B = \{$karo, maça$\}$, $C = \{$sinek, kupa$\}$ ve $D = \{$sinek$\}$.
   Aşağıdaki kümeler arasındaki ilişkiyi simgesel olarak ifade et.
   a) Küme A ile küme C
   b) Küme D ile küme C
   c) Küme B ile küme C

3. $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$ robotlar kümesi ve
   $T = \{$navigasyon, kaldırma, tarama, sıralama, montaj, test$\}$ robotların yerine getirebileceği görevler kümesi olsun.
   a) Her robotu tam olarak bir göreve ata. b) $R \sim T$ midir?

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ve $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ kümeleri verilsin.
   $A \cap X = \{3, 5\}$ ve $B \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ olacak şekilde bir X kümesi bul.

5. Venn diyagramı yardımıyla A ve B kümelerini bul, eğer $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
   $A \cap B = \{4, 5\}$ ve $A \setminus B = \{1, 3\}$.

6. Evrensel küme $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve onun iki altkümesi $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ve $B = \{2, 3, 5, 7\}$ verilsin.
   a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ve $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ eşitliklerinin doğru olup olmadığını kontrol et.
   b) Şu kümeler için Venn diyagramı çiz: $(A \cup B)^c$, $A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c$ ve $A^c \cup B^c$

7. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ve $C = \{3, 4, 5\}$ kümeleri verilsin. Aşağıdakilerin kardinal sayısını bul:
   a) $k(A)$ b) $k(B)$ c) $k(C)$ d) $k(A \cup B)$ e) $k(A \cap C)$
   f) $k(A \setminus C)$ g) $k(B \cup C)$ h) $k(B \setminus C)$ i) $k(A \cup B \cup C)$ j) $k(A \cap B \cap C)$

8. Bir sınıfta 36 öğrenci vardır. Bunların 30'u cep telefonu (M) sahibidir, 28'i hesap makinesi (K) sahibidir ve 2 öğrenci ne cep telefonu ne de hesap makinesine sahiptir. Kaç öğrenci hem cep telefonu hem de hesap makinesi sahibidir?

9. Bir araştırma 21 katılımcının A ürününü, 26'sının B ürününü ve 29'unun C ürününü satın aldığını göstermiştir. Eğer 14 katılımcı A ve B ürünlerini, 12 katılımcı A ve C ürünlerini, 14 katılımcı B ve C ürünlerini ve 8 katılımcı her üç ürünü birden satın alıyorsa, yalnızca C ürününü satın alan kaç katılımcı vardır?

10. Okul olimpiyatlarında futbolda (F) 38, basketbolda (K) 15 ve hentbolda (R) 20 madalya verilmiştir. Madalyaları 58 öğrenci kazanmış ve 3 öğrenci üç sporun hepsinde madalya kazanmıştır. Tam olarak üç spordan ikisinde madalya kazanan kaç öğrenci vardır?

11. Bir kasap zinciri 1000 müşteriyi anket yapmıştır. Bunların 720'si dana eti, 450'si domuz eti satın aldığını belirtmiştir. En az kaç müşteri hem dana hem domuz eti satın almıştır?

12. (a, b) sıralı bütün sayı çiftlerini yaz; öyle ki a ikinci onluktaki (10–19) asal bir sayıdır ve $b = a + 3$ olsun.

13. Bir şirket 3 aygıtı test etmiştir. Her aygıt 2 işletim sistemiyle test edilmiştir.
    a) D = {telefon, tablet, dizüstü bilgisayar} ve O = {Android, Linux} ise $D \times O$ kümesini yaz.
    b) Şirket kaç test gerçekleştirmiştir?

14. Anita'nın 72 litre portakal suyu ve 90 litre limon suyu vardır. Bunları eşit hacimli şişelere, hiç artmayacak şekilde doldurmak istiyor. Şişelerin alabileceği en büyük olası hacim nedir?

15. Bir tünelde üç ışıklı sinyal aynı anda yanıp söndü. Birinci sinyal her 12 saniyede, ikincisi her 18 saniyede, üçüncüsü ise her 30 saniyede yanıp sönüyor. Kaç saniye sonra tekrar birlikte yanıp sönerler?

16. Isak, Petar ve Gorast'ın adım uzunlukları sırasıyla 60 cm, 65 cm ve 70 cm'dir. Aynı anda, aynı yerden ve aynı yönde yürümeye başlıyorlar. Her birinin tam sayı adım atacağı ilk noktaya olan uzaklık nedir?

17. Sayıları karşılaştır: a) $|-7|$ ve $|-10|$ b) $|-25|$ ve $|4|$ c) $|0|$ ve $|-8|$ ç) $|12|$ ve $|-100|$

18. Bir araştırmacı bir su altı mağarasının deniz seviyesinden –30 metre yükseklikte, bir tepe zirvesinin 120 metre yükseklikte, bir göl yüzeyinin 0 metrede ve bir yer altı laboratuvarının –12 metre yükseklikte olduğunu kaydetmiştir. Yükseklikleri en düşükten en yükseğe doğru sırala.

19. Arif'in hesabında 3 600 denar vardı ve şu faturaları ödemesi gerekiyor: elektrik 2 860, su 670 ve telefon 1 340 denar.
    a) Faturaları ödedikten sonra Arif'in hesabının bakiyesi kaç denar olur?
    b) Eksiye düşmemek için hesabına 1 500 denar yatırması yeterli olur mu?

20. Hesapla:

a) $\dfrac{3\frac{1}{5}\cdot 7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5} - 2\frac{7}{30}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}}{12} + \dfrac{5}{\frac{3}{6}} - \dfrac{2+\frac{1}{3}}{3-\frac{2}{5}}$ c) $\dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25) : 2{,}5}$

21. Hesapla:

a) $3{,}72 + 0{,}02 - 2{,}35$ b) $0{,}5 + 1{,}(5) - 2{,}3(7)$ c) $6{,}25 : 0{,}5 \cdot 0{,}01$

22. Küçük bir köprü için temele 3,25 metre çelik çubuk, yan parçalara 2,6 metre ve üst kısma 1,85 metre gereklidir.

a) Kaç metre çelik çubuk gereklidir?

b) Satışta yalnızca 2,5 metre uzunluğunda çelik çubuk parçaları varsa, kaç parça çelik çubuk temin edilmelidir?

23. Bir gezegenin yörüngesinin yarıçapı $r = 149{,}6$ milyon kilometredir. $\pi \approx 3{,}14$ ise gezegenin yörüngesinin yaklaşık uzunluğunu hesapla.

24. Bakteriler yalnızca sıcaklık 5 °C ile 45 °C arasında olduğunda hayatta kalır.

a) İzin verilen sıcaklık aralığını yaz.

b) Bakteriler 5 °C sıcaklıkta hayatta kalır mı?

25. Bir aşçının malzemeleri hazırlaması 1 saat, yemeği pişirmesi 2 saat 15 dakika ve temizlemesi 45 dakika sürüyor. Malzemeleri hazırlama süresinin, pişirme süresinin ve temizlik süresinin oranını belirle. Çözümü sadeleştirilmiş biçimde yaz.

26. Bir kutuda 1160 beyaz, kırmızı ve mavi bilye vardır. Beyaz ve kırmızı bilyelerin sayıları 5 : 6 oranında, kırmızı ve mavi bilyelerin sayıları 4 : 6 oranındadır. Her renkten kaç bilye vardır?

27. Aşağıdaki büyüklüklerden hangileri doğru orantılı, hangileri ters orantılıdır:

a) İki sayının çarpımı, eğer çarpanlardan biri sabitse,

b) Bir kesrin değeri ile payı, eğer paydası sabitse,

c) Bir kesrin değeri ile paydası, eğer payı sabitse.

28. Bir firma aylık 120 000 denar gelir getiren güneş panellerine yatırım yapıyor. İlk yıl bakım maliyetleri gelirin %25'idir. İkinci yıl bu maliyetler %40 azalır.

a) İlk yıl bakım için ayda kaç denar harcanmıştır?

b) Azalmadan sonra ikinci yıl maliyetler ne kadardır?

c) İki yıl arasındaki bakım kaynaklı kârın yüzdesel artışı ne kadardır?

29. Bir ticaret şirketi tanesi 32 000 denardan 40 elektrikli scooter satın almıştır. Pildeki teknik sorunlar nedeniyle %35 zararla satmak zorunda kalmıştır.

a) Her scooter hangi fiyattan satılmıştır?

b) Parça başına zarar ne kadardır?

c) Tüm scooterlar için toplam zarar ne kadardır?

30. Andrej fiyatı 80 avro olan bir kitap ithal ediyor. Taşıma için 10 avro ödemesi gerekiyor. Gümrük vergisinden muafsa ve KDV oranı %5 ise kitabı teslim alırken ne kadar ödemelidir?

31. Bir kaynaktan 16 dakikada 100 litre su akıyor. 3 2/3 saatte kaç litre su akar?

32. Bir ürün ABD'de 350 dolar ve Makedonya'da 19 000 denardır. Ürün hangi ülkede daha ucuzdur?

33. Üç adet 160 kilovat gücünde ekskavatör, günde 6 saat çalışarak 10 günde uzunluğu 360 metre, genişliği 4 metre ve derinliği 2,5 metre olan bir kanal kazabilir. 5 adet 120 kilovat gücünde ekskavatör, günde 7 saat çalışarak 8 günde, genişliği 3,5 metre ve derinliği 2 metre olan ne kadar uzunlukta bir kanal kazabilir?

34. Bir dörtgenin açılarını bul, eğer oranları 2 : 5 : 4 : 7 ise.

35. Üç kişi 70 000 avroluk mirası yaşlarına ters orantılı olarak paylaşmalıdır. Eğer onların yaşları sırasıyla 20, 30 ve 40 ise, her biri mirastan ne kadar alacaktır?

36. 3 litre %1,5'lik tuz çözeltisi elde etmek istiyoruz. Elimizde %1,8'lik tuz çözeltisi ve %1,1'lik tuz çözeltisi var. Her çözeltiden kaç litre alınmalıdır?

37. Kışın başında sürücü aracının deposuna 2,5 litre antifriz ve 2,5 litre su koymuştur. Bir ay sonra karışımdan 1 litre sızmış ve sürücü bunu 1 litre su ekleyerek tamamlamıştır. Ertesi ay tekrar 1 litre sızmış, bu sefer sürücü 1 litre antifriz eklemiştir.

    a) Şimdi depodaki karışımda antifriz mi daha fazla, su mu?

    b) Eğer sürücü ilk seferinde 1 litre antifriz, ikinci seferinde 1 litre su ekleseydi cevap nasıl olurdu?

38. Suzana yatırımı sayesinde 3 yılda 7000 denar kazandı. Basit faiz oranı %14,25 ise, kaç para yatırmıştır?

39. Ahmet küçük bir dükkânın sahibidir. Yeni ekipman için 185 000 denar kredi almıştır. Tüm krediyi iki yıl sonra geri ödemiştir. Eğer banka %15 bileşik faiz oranı uygulamışsa, Ahmet iki yıl sonra toplam ne kadar geri ödemiştir?

Konu 2:

CEBİRSEL RASYONEL İFADELER

Bu konuyu işlerken şu becerilere sahip olacaksın:

1. Üslerle günlük yaşam bağlamında problemleri çözmek;
2. STEM problemlerinde polinomların düzenlenmesi için kuralları uygulamak;
3. Kesirli-rasyonel ifadelerin sadeleştirilmesi için cebirsel kesirlerle şlemleri uygulamak.

02

2.1. Üs ve Doğal Sayı Kuvvetli Bir Üssün Değeri

Doğal Sayı Kuvvetli Üs

Eşit terimlerin toplamı şöyle yazılabilir:

$10 + 10 = 2 \cdot 10$

$10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10$

$10 + 10 + 10 + 10 = 4 \cdot 10$

.....

$\underbrace{10 + 10 + 10 + \ldots + 10}_{n \text{ kez}} = n \cdot 10$

Eşit terimlerin toplanması çarpma işlemini doğurur.

Eşit çarpanların çarpımı şöyle yazılır:

$2 \cdot 2 = 2^2$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

.....

Eşit çarpanların çarpılması üssü alma işlemini doğurur.

Beş tane 2 sayısının çarpımı için şöyle yazarız:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ "2 üzeri 5" veya "2'nin beşinci kuvveti" diye okuruz.

Üs göstergesi 5, taban olan 2'nin kaç kez kendisiyle çarpıldığını gösterir.

$4 \cdot 4 = 4^2$ "4 üzeri 2" veya "4'ün karesi" diye okuruz.

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ "6 üzeri 3" veya "6'nın küpü" diye okuruz.



n tane eşit çarpanın çarpımı, her biri gerçek sayı a olmak üzere, tabanı a ve üs göstergesi (ekspONENT) n olan üs olarak adlandırılır ve a^n ile gösterilir.

$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kez}} = a^n$ "a üzeri n" veya "a'nın n'inci kuvveti" diye okunur.

Çünkü her çarpımda en az iki çarpan vardır, yukarıdaki tanıma göre üs göstergesi n, 2'den küçük değildir. Tanımı tamamlıyoruz ve uzlaşı gereği $a^1 = a$ kabul ediyoruz.
Bu anlamda, örneğin: $8^1=8$.

ÖRNEK 1

Çarpımı üs biçiminde yaz:

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, b) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7) \cdot (-0{,}7)$, c) $x \cdot x \cdot x$, d) $(-a) \cdot (-a)$.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$ 4 tane 7 sayısının çarpımı

b) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7) = (-0{,}7)^2$ $(-0{,}7)$ sayısının 3 çarpanının çarpımı

c) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$ 5 tane x çarpanının çarpımı

d) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = (-a)^3$ $(-a)$'nın 3 çarpanının çarpımı

SORU 1

Üssün tabanını ve üs göstergesini yaz:

a) $(-3)^6$ b) $\frac{2}{3}$ c) $(0{,}5)^3$ ç) $\left(-\frac{6}{11}\right)^7$ d) $(-x)^2$ e) $(a+b)^5$

SORU 2

Dört hentbol maçında, takım için toplam gol sayısını dört hentbolcu atmıştır; her biri her maçta 4'er gol atmıştır.

a) Takımın her maçta attığı gol sayısını üs biçiminde yaz.

b) Takımın dört maçta attığı toplam gol sayısını üs biçiminde yaz.

Üsün Değeri

Herhangi bir sayının üssünün değeri, o sayı çarpım biçiminde yazılarak ve sonra çarpma yapılarak hesaplanır.

Üssün hesaplanması işlemini hesap makinesi kullanarak da yapabiliriz.

Üs göstergesi 2 (kare) ve üs göstergesi 3 (küp) olan üsleri hesaplamak için x^2 ve x^3 tuşlarını kullanırız.

Üs göstergesi 2 (kare) veya 3 (küp)'ten farklı olduğunda ise $x^{\blacksquare}$ veya y^x tuşlarını kullanırız.

ÖRNEK 2

Üs değerini hesapla: a) 2^4 b) $(-3)^5$ c) $(-7)^2$ ç) 1^7 d) 0^6

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ veya hesap makinesinde 2 $x^{\blacksquare}$ 4 $=$

Dikkat et: Pozitif bir sayının üssü pozitiftir.

b) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$ veya hesap makinesinde $(-)$ 3 $x^{\blacksquare}$ 5 $=$

Şunu fark et: Negatif bir sayının tek kuvveti negatiftir.

c) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$ veya hesap makinesinde $(-)$ 7 x^2 $=$

Negatif bir sayının çift kuvvetinin değerini hesapladık ve pozitif sayı elde ettik.

ç) $1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

d) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

ETKİNLİK

Üssü yaz ve değerini hesapla:

a) taban 12 ve üs 4 b) taban -7 ve üs 3 c) taban $-1{,}6$ ve üs 2

Tabanın işareti ile üssün tek/çift olmasının, üssün değerinin işaretiyle olan ilişkisi hakkında bir sonuç çıkarabilir misin?

- Pozitif bir sayının üssü pozitiftir, yani eğer $a > 0$ ise, $a^n > 0$
- Negatif bir sayının çift kuvveti pozitiftir, yani eğer $a < 0$ ise, $a^{2k} > 0$, $k \in \mathbb{N}$.
- Negatif bir sayının tek kuvveti negatiftir, yani eğer $a < 0$ ise, $a^{2k+1} < 0$, $k \in \mathbb{N}$.
- Özellikle, eğer $a = 1$ ise, $a^n = 1$ eğer $a = 0$ ise, $a^n = 0$

SORU 3

Hesaplama yapmadan, üssün işaretini belirle:

a) 25^5 b) $(-16)^7$ c) $(-16)^3$ ç) 0^{81} d) 1.

Sonucunu hesap makinesiyle üssün değerini bularak kontrol et.

ÖRNEK 3

$(25^3 + 15^2) : (25 - 15)$ andesine değerini hesapla ve sonra hesap makinesiyle kontrol et.

Gerekli kuralları izlemeliyiz:

- Parantezli sayısal ifadelerin hesaplanmasında, öncelik parantez içindeki işlemlerdedir.
- Üs alma, çarpma, bölme, toplama ve çıkarma işlemleri olan ifadelerde önce üs alma yapılır, ardından çarpma ve bölme, en sonda toplama ve çıkarma yapılır.

$$(25^3 + 15^2) : (25 - 15) = (15625 + 225) : 10$$
$$= 15850 : 10 = 1585$$

Hesap makinesiyle tek adımda hesaplamak için parantezleri kullanmalıyız:

(2 5 x^3 + 1 5 x^2) ÷ (2 5 - 1 5) =

SORU 4

Mars gezegeni Güneş Sistemi'nin dördüncü gezegenidir. Gezegeni çapı yaklaşık 949^494 kilometredir. Üssü çarpım biçiminde yaz ve hesapla. Mars'ın çapı kaç kilometre eder?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çarpımı üs biçiminde yaz:

a) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ b) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ c) $t \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t$

d) $a \cdot a \cdot a$ e) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$ f) $d \cdot e \cdot e \cdot d \cdot d \cdot e$

2. Hesap makinesi yardımıyla hesapla:

a) 7^2 b) 2^7 c) 4^5 d) $(-7)^8$ e) 0^8 f) $(-2)^5$ g) $0{,}2^2$

3. Üssün işaretini belirle: a) 25^{35} b) $(-16)^{54}$ c) $(-16)^{23}$ d) 0^{81} e) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{21}$

4. Doğru olanı yuvarlak içine al:
a) $2^3 = 3^2$ b) $(-2)^3 = (-3)^2$ c) $(-2)^{100} > 0$ d) $(-3)^{23} < 0$ e) $0^{10} < 10$.

5. Sayıyı sıfırla karşılaştır, eğer:
a) $a^{75} < 0$ b) $a^{13} > 0$ c) $(-a)^{53} > 0$ d) $a^{23} = 0$ e) $2a^3 < 0$.

6. İfadenin değerini hesapla:
a) $3 \cdot 5^2 + 4^3 - 5 \cdot 7^3$
b) $(-2)(-3)(-4)^2 - (-1)^5(-2)^2$
c) $100 \cdot (-2{,}1)^3 + 3{,}4 \cdot (-2{,}2)^2 - 0{,}3 \cdot (-0{,}3)^2$
d) $(2^3 + 4^2) : (3^5 - 5^3)$
Hesap makinesiyle kontrol et.

7. İfadenin değerini hesapla.
a) $6a^7 + 3a^4 - 8a^{45} + 4$ eğer $a = -1$
b) $2ax^3 - a^2x^2 + 3ax + 10$ eğer $a = -1$ ve $x = 2$

8. Olga yaklaşan konser hakkında bilgiyi üç arkadaşıyla paylaşmıştır. Onların her biri bilgiyi üç farklı arkadaşıyla paylaşmış, onlar da yine üçer farklı arkadaşıyla paylaşmışlardır. Konser hakkında toplam kaç kişi bilgi edinmiştir?

9. Eğer bakteri popülasyonu her saat iki katına çıkıyorsa, 1 bakteriden 6 saat sonra kaç bakteri olacaktır?

10. Venüs'ün kendi ekseni etrafında dönmesi için gereken süre, Dünya'nın kendi ekseni etrafında dönmesi için gereken süreden 3^5 kat daha uzundur. Venüs'ün kendi ekseni etrafındaki dönüş süresinin, Dünya'nın kendi ekseni etrafındaki dönüş süresinden kaç kat daha uzun olduğunu bulmak için üstün değerini hesapla.

ARAŞTIRMA

Eğer birler basamağı 2 olan bir sayıyı kare yaparsak, elde edeceğimiz sayının sonu 4 ile biter.

Bir sayının birler basamağı 1 ise, onun üçüncü kuvveti hangi rakamla biter? Birler basamağı 3'ten 9'a kadar olan sayılar için benzer örnekler yaz.

Bazı rakamlar vardır ki herhangi bir sayının karesi olan sayıların birler basamağında asla bulunamaz. Bu rakamların hangileri olduğunu keşfet.

2.2. Kare ve Küp Kök

Kare Kök

ETKİNLİK

Bir karenin alanı 49 cm²'dir. Onun bir kenarı kaç santimetredir?
Kenarını nasıl hesaplayacaksın?

Tabloyu incele:

n	3	7		9	
n^2			36		64

Tabloyu doldurmak için senden istenenler:

- 3, 7 ve 9 sayılarının karelerini bulmak, bunlar sırasıyla 9, 49 ve 81'dir;
- Kareleri 36 ve 64 olan sayıları bulmak.

İkinci istek birincisinin tersidir, yani 36 sayısı için karesi 36 olan sayıyı bulmalısın.
Bu sayı $\sqrt{36}$ ile gösterilir ve 36 sayısının kare kökü olarak adlandırılır.

$\sqrt{36} = 6$ çünkü $6^2 = 36$ $\quad$ $\sqrt{64} = 8$ çünkü $8^2 = 64$



Kare kök (göstergesi 2 olan kök) negatif olmayan bir gerçek sayı a'nın, negatif olmayan bir gerçek sayı b'sidir; öyle ki $b^2 = a$ ve $\sqrt{a}$ ile gösterilir.
$\sqrt{a} = b$ "a'nın kare kökü b'dir" diye okunur.

İfade $\sqrt{a}$'da sayı a "kök içi büyüklük" olarak adlandırılır.

Üs alma işleminin tersi olan ve verilen bir sayının karekökünü hesapladığımız işleme, kök alma işlemi (kök göstergesi 2 ile) ya da kısaca kök alma denir.

Hesap makinelerinde karekök hesaplamak için özel bir tuş vardır, genellikle $\sqrt{\ }$ veya $\sqrt{\square}$ ile gösterilir. Buna göre, 64 sayısının karekökünü hesaplamak için şu şekilde gireriz:

6 4 $\sqrt{\ }$ = veya $\sqrt{\ }$ 6 4 =

SORU 1

İfadenin değerini hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:

a) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$ $\quad$ b) $3 + 2\sqrt{36}$ $\quad$ c) $\sqrt{15^2 - 12^2}$ $\quad$ d) $5^2 + 4\sqrt{81}$

ETKİNLİK

Karekökün değerini hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:

a) $\sqrt{100}$ $\quad$ b) $\sqrt{10\,000}$ $\quad$ c) $\sqrt{0{,}01}$ $\quad$ d) $\sqrt{0{,}0001}$

Verilen sayıların yazılışında çift sayıda sıfır vardır.

Bir sayının yazılışındaki sıfırların sayısıyla onun karekökünün yazılışındaki sıfırların sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Genel bir sonuç çıkarabilir misin?

Küp Kök

ETKİNLİK

Bir küpün hacmi 27 cm³'tür. Onun bir kenarı kaç santimetredir?
Kenar uzunluğunu nasıl hesaplayacaksın?

Tabloyu incele:
Tabloyu doldurmak için şunları yapmalısın:

n	2	−5		
n^3			27	−64

- 2 ve −5 sayılarının küplerini bul, bunlar sırasıyla 8 ve −125'tir;
- küpleri 27 ve −64 olan sayıları bul.

İkinci istek birincisinin tersidir, yani 27 sayısı için küpü 27 olan sayıyı bulmalısın.
Bu sayı $\sqrt[3]{27}$ ile gösterilir ve 27 sayısının küp kökü olarak adlandırılır.

$\sqrt[3]{27} = 3$ çünkü $3^3 = 27$ $\quad\quad$ $\sqrt[3]{-64} = -4$ çünkü $(-4)^3 = -64$



Küp kök (göstergesi 3 olan kök) bir gerçek sayı a'nın, öyle bir gerçek sayı b'sidir ki $b^3 = a$ olur ve $\sqrt[3]{a}$ ile gösterilir.

$\sqrt[3]{a} = b$ "a'nın küp kökü b'dir" diye okunur.

Bir sayının küp kökünü hesapladığımız işleme, kök göstergesi 3 ile kök alma ya da kısaca kök alma denir.

Hesap makinelerinde küp kökü hesaplamak için özel bir tuş vardır, genellikle $\sqrt[3]{}$ veya $\sqrt[3]{\square}$ ile gösterilir.
Buna göre, 125 sayısının küp kökünü hesaplamak için şunu gireriz:

[1] [2] [5] [$\sqrt[3]{}$] [=] veya [$\sqrt[3]{}$] [1] [2] [5] [=]

SORU 2

İfadenin değerini hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:

a) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-8}$ $\quad$ b) $1{,}5 - 6\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[3]{3^2 - 1^2}$ $\quad$ d) $(4 + 7\sqrt[3]{125}) : (5^2 - 4\sqrt[3]{27})$

ETKİNLİK

Küp kökün değerini hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:

a) $\sqrt[3]{1000}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{1000000}$ $\quad$ c) $\sqrt[3]{0{,}001}$ $\quad$ d) $\sqrt[3]{0{,}000001}$

Bir sayının yazılışındaki sıfırların sayısı ile o sayının küp kökünün yazılışındaki sıfırların sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Genel bir sonuç çıkarabilir misin?

02

n'inci Kök

ETKİNLİK

Biliyoruz ki, örneğin: $\sqrt{4} = 2$ çünkü $2^2 = 4$ $\quad \sqrt[3]{-27} = -3$ çünkü $(-3)^3 = -27$

Aynı şekilde düşünürsek, örneğin: $\sqrt[4]{16}, \sqrt[3]{-243}$ ve $\sqrt[6]{64}$ kaç olacaktır?



- a negatif olmayan bir gerçek sayı ve $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ olsun.
  $b^n = a$ olacak şekilde bulunan negatif olmayan b sayısına a'nın n'inci kökü denir.
- a gerçek sayı ve $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ olsun.
  $b^n = a$ olacak şekilde bulunan gerçek b sayısına a'nın n'inci kökü denir.

$b = \sqrt[n]{a}$ "b, a'nın n'inci köküdür" diye okunur

$b = a^{\frac{1}{n}}$ "b, a'nın 1/n'inci kuvvetidir" diye okunur

Bu anlamda, örneğin: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$.

Hesap makinelerinde herhangi bir dereceden kök hesaplamak için özel bir tuş bulunur, genellikle

$\sqrt[x]{}$ veya $\sqrt[x]{}$ veya $\sqrt[\square]{x}$ ile gösterilir.

SORU 3

Hesapla:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt[5]{-243}$ e) $\sqrt[6]{64}$ f) $\sqrt[8]{256}$ g) $\sqrt[7]{2187}$

SORU 4

İfadenin değerini hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:

a) $\sqrt[5]{243} + \sqrt[3]{-27}$ b) $3 - 2{,}5\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[3]{4^3 - 32}$ d) $(4^2 - 3\sqrt[4]{625}) : (7^2 + 4\sqrt[4]{81})$

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Hesapla:

a) 100'ün karekökü b) 8'in küp kökü c) $\sqrt{49}$ d) $\sqrt[3]{81}$

2. Verilen tabloları yeniden yaz ve tamamla.

a) 1'den 15'e kadar olan sayıların kareleri:

Sayı	1	2		4		6			9	10	11			14	15
Karesi			9		25		49	64				144	169		

b) 1'den 5'e kadar olan sayıların küpleri ve 10 sayısının küpü:

Sayı	1	2		4		10
Kübü			27		125	

3. Doğal sayı n'yi bul, öyle ki:
   a) n^2, 50 ile 80 arasındadır b) n^3, 50 ile 100 arasındadır

4. Hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:
   a) $7^2 + \sqrt{49}$ b) $\frac{6^2}{\sqrt{81}}$ c) $\sqrt{10^2 - 8^2}$ d) $\sqrt[3]{64} + \sqrt{64}$
   e) $\sqrt[3]{512}\frac{3^2}{4^2}$ f) $\sqrt[3]{1000} - \frac{1}{\sqrt{100}}$ g) $(\sqrt{20})^2 + \sqrt[3]{-8}$ h) $15\sqrt[3]{27} + 2\sqrt{16} - 9$

5. İfadenin değerini hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:
   a) $2x - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 12$ eğer $x = 64$ b) $(a^2 + 2\sqrt[3]{a-7} - 4)^2 + a^2 - \sqrt{a}$ eğer $a = 81$

6. Sadeleştir: a) $\frac{\sqrt[3]{3}+5}{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt[3]{3}+10} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}}{14} : \frac{2\sqrt[3]{3}-2\sqrt{5}}{7} - \frac{1}{4}$

7. Aracın güvenli bir şekilde durması için gerekli mesafe, aracın hızının karesiyle doğru orantılı olarak artar. Eğer bir aracın 20 km/s hızda durması için 40 m gerekiyorsa, 90 m'de durması için aracın hızı kaç km/s olur?

8. Küp şeklinde karton kutular üreten bir şirket, hacmi 64 cm³ olan bir kutu üretmelidir. Kutunun kenar uzunluğunu hesapla.

ARAŞTIRMA

Sara, $\sqrt{45}$'in değerini tahmin etmektedir. O, $\sqrt{45}$'in 6 ile 7 arasında bir sayı olması gerektiğini söylüyor. Onun açıklaması: 45, 36 ($36 = 6^2$) ile 49 ($49 = 7^2$) arasındadır.

Araştır ve kökün hangi iki sayı arasında olduğunu bul:

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{102}$ c) $\sqrt{150}$ d) $\sqrt[3]{12}$ e) $\sqrt[3]{100}$ f) $\sqrt{2000}$

Sonuçlarını hesap makinesiyle kontrol et.

2.3. Doğal Sayı Üs Göstergeli Üslerle İşlemler

Aynı Tabanlı Üslerin Çarpılması ve Bölünmesi

ETKİNLİK

Aynı tabanlı üsleri nasıl çarptığımızı incele ve açıkla:

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$ $3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

Kural, aynı tabana sahip herhangi iki üssün çarpımı için geçerlidir.



Aynı tabanlı üsler çarpılırken, taban üslerin göstergelerinin toplamı kadar üs alınır, yani:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. (1)

Aynı kural, rastgele sayıda çarpan için de geçerlidir.

ÖRNEK 1

Çarpımı üs biçiminde yaz: a) $7^2 \cdot 7^6$ b) $(-3)^7 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$

a) $7^2 \cdot 7^6 = 7^{2+6} = 7^8$

Hesap makinesine şunları gireriz:

7 x^2 × 7 x^y 6 =

5 764 801 sonucunu elde ederiz, bu da 7^8'e eşittir.

b) $(-3)^7 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5 = (-3)^{7+2+5} = (-3)^{14}$

Hesap makinesine şunları gireriz:

(−3) x^y 7 × (−3) x^y 2 × (−3) x^y 5 =

4 782 969 sonucunu elde ederiz, bu da $(-3)^{14}$'e eşittir.

ÖRNEK 2

İfadeyi sadeleştir: a) $5p^7 \cdot 4p^4$ b) $0{,}2(y+1)^8 \cdot 0{,}5(y+1)^3$

a) $5p^7 \cdot 4p^4 = (5 \cdot 4)\, p^{7+4} = 20p^{11}$

b) $0{,}2(y+1)^8 \cdot 0{,}5(y+1)^3 = (0{,}2 \cdot 0{,}5)(y+1)^{8+3} = 0{,}1(y+1)^{11}$

SORU 1

Çarpımı üs biçiminde yaz:

a) $100^4 \cdot 100^6$ b) $(-6)^4 \cdot (-6)^2 \cdot (-6)^3$ c) $x^3 \cdot x^8$ d) $(x-1)^8 \cdot (x-1)^{23} \cdot (x-1)^{25}$

ÖRNEK 3

Bir çikolata üretim fabrikasında bir işçi, bir kutuya 3^2 çikolata paketlemektedir. Gün boyunca işçi 3^3 kutu çikolata paketlemiştir. Gün boyunca işçinin toplam kaç çikolata paketlediğini hesapla. Çözümü üs biçiminde ifade et ve ardından değerini hesapla.

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

Fabrika 243 çikolata paketlemiştir.

ETKİNLİK

Aynı tabanlı üslerin bölünmesi kuralını, şu hesaplamalara göre keşfet:

$3^6 : 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$ $3^6 : 3^2 = \dfrac{3^6}{3^2} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4$



Aynı tabanlı üsler bölünürken, ortak taban bölünenin üs göstergesi ile bölenin üs göstergesinin farkı kadar üs alınır, yani:

$a^n : a^m = a^{n-m}$, koşuluyla $m > n$ ve $a \neq 0$. (2)

ÖRNEK 4

Bölümü üs biçiminde yaz: a) $13^7 : 13^3$ b) $(-a)^{11} : (-a)^4$

a) $13^7 : 13^3 = 13^{7-3} = 13^4$ b) $(-a)^{11} : (-a)^4 = (-a)^{11-4} = (-a)^7$

SORU 2

Bölümü üs biçiminde yaz:

a) $5^6 : 5^4$ b) $0{,}35^8 : 0{,}35^6$ c) $(-4)^{12} : (-4)^7$ d) $y^{72} : y^{46}$ e) $(a-b)^7 : (a-b)^3$

SORU 3

Bir fabrika gündüz saatlerinde saatte 5^4 kilovat elektrik enerjisi tüketmektedir. Gece saatlerinde ise fabrika saatte 5^2 kilovat elektrik enerjisi tüketmektedir. Fabrika, gündüz saatlerinde geceye kıyasla kaç kat daha fazla elektrik enerjisi tüketmektedir? (Not: Gündüz saatlerinin sayısı gece saatlerinin sayısına eşittir.)

Üs alma: Çarpım, Bölüm ve Üs

ETKİNLİK

Hesaplamayı takip et ve iki sayının çarpımı nasıl üslü hale getirildiğini çıkar:

$(4 \cdot 5)^3 = 4^3 \cdot 5^3$ $(4 \cdot 5)^3 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4^3 \cdot 5^3$

Muhtemelen fark ettin ki, çarpımın üçüncü kuvveti çarpanların üçüncü kuvvetlerinin çarpımına eşittir.



İki sayının çarpımı üs alınırken, her çarpan üs göstergesiyle üslendirilir ve elde edilen üsler çarpılır, yani:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (3)

ÖRNEK 5

Çarpımı üssüne yükselt: a) $(2 \cdot 3)^4$ b) $[(-0{,}25) \cdot (2{,}7)]^4$ c) $(-2a)^5$

a) $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$ b) $[(-0{,}25) \cdot (2{,}7))]^4 = (-0{,}25)^4 \cdot (2{,}7)^4$ c) $(-2a)^5 = (-2)^5 \cdot a^5$

İki sayının çarpımını üslendirme kuralı, çarpım ikiden fazla çarpan içerdiğinde de geçerlidir.

ÖRNEK 6

İfadeyi sadeleştir: a) $(4 \cdot 3 \cdot 2)^3$ b) $[(-3) \cdot 5 \cdot x]^3$

a) $(4 \cdot 3 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3$
$= 64 \cdot 27 \cdot 8$
$= 13\,824$

b) $((-3) \cdot 5 \cdot x)^4 = (-3)^4 \cdot 5^4 \cdot x^4$
$= 81 \cdot 625 \cdot x^4$
$= 50\,625 \cdot x^4$

SORU 4

Çarpımı üssüne yükselt: a) $\left[(-5) \cdot 0{,}75 \cdot \frac{2}{3}\right]^4$ b) $(x \cdot y \cdot z)^3$ c) $\left(\frac{x}{3} \cdot \frac{y}{2} \cdot z\right)^3$

ETKİNLİK

Bir nakliye şirketinin 24 kamyonu vardır. Her kamyona 5^4 kutu yüklemiştir. Kutuların toplam sayısını daha kolay hesaplamak için çarpımın üslendirilmesi kuralını sağdan sola okuyabilirsin.

Eşitlik (3) bazen sağdan sola okunup uygulanır, yani:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Bu da demektir ki, aynı üslere sahip üsler çarpılırken, tabanların çarpımı ortak üs göstergesiyle üslendirilir.

ÖRNEK 7

Üsleri çarp ve hesapla: a) $6^3 \cdot 5^3$ b) $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

a) $6^3 \cdot 5^3 = (6 \cdot 5)^3 = 30^3 = 27\,000$

b) $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 4^3 = 64$

SORU 5

Hesapla: a) $55^2 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^2$ b) $4^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7$ c) $(-3)^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$.

ETKİNLİK

Bölümün üslendirilmesi kuralını keşfet:

$(4 : 5)^3 = 4^3 : 5^3$ $\quad (4 : 5)^3 = (4 : 5) \cdot (4 : 5) \cdot (4 : 5) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4^3}{5^3} = 4^3 : 5^3$

Kesinlikle fark etmişsindir ki, bölümün üçüncü kuvveti, payın üçüncü kuvvetinin paydanın üçüncü kuvvetine bölümüdür. Genel durumda şunu elde ederiz:

İki sayının bölümü üslendirilirken, hem pay hem de payda aynı üs göstergesiyle üslendirilir ve sonra üslü pay, üslü paydaya bölünür, yani:

$(a : b)^n = a^n : b^n$, koşuluyla $b \neq 0$ (4)

ÖRNEK 8

Bölümü üssüne yükselt: a) $(4 : 5)^3$ b) $(2 : 7)^{12}$ c) $(x : 2)^3$

a) $(4 : 5)^3 = 4^3 : 5^3$ b) $(2 : 7)^{12} = 2^{12} : 7^{12}$ c) $(x : 2)^3 = x^3 : 2^3$

SORU 6

Bölümün üslendirilmesini yap: a) $(7 : 3)^{25}$ b) $(2 : x)^5$ c) $[(x + 1) : x]^3$

Eşitlik (4) bazen sağdan sola okunup uygulanır, yani:

$a^n : b^n = (a : b)^n$, koşuluyla $b \neq 0$

Bu da demektir ki, aynı üslere sahip üsler bölünürken, tabanların bölümü ortak üs göstergesiyle üslendirilir.

ÖRNEK 9

İfadeyi sadeleştir ve çözümü üs biçiminde yaz: a) $27^5 : 9^5$ b) $1{,}5^3 : 0{,}5^3$

a) $27^5 : 9^5 = (27 : 9)^5 = 3^5$ b) $1{,}5^3 : 0{,}5^3 = (1{,}5 : 0{,}5)^3 = 3^3$

SORU 7

A anteni 50 birim şiddetinde, B anteni ise 10 birim şiddetinde sinyal iletmektedir.

Her iki sinyal şiddeti de üs göstergesi 2 ile üslendirildiğinde, güçlendirmeden sonra A anteninin sinyal şiddetinin B antenine oranı ne olacaktır?

ETKİNLİK

Tabanı 3^4 olan $(3^4)^2$ üssünü, tabanı 3 olan bir üs şeklinde yazabiliriz. Hesaplamaları takip et ve $(3^4)^2$ üssünün nasıl tabanı 3 olan bir üs olarak yazılabileceğini açıkla.

$(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

$(3^4)^2 = (3^4) \cdot (3^4) = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^8$

Kesinlikle fark etmişsindir ki, üs göstergesi iki üs göstergesinin çarpımıdır. Genel durumda şunu elde ederiz:



Bir üs, tekrar üslendirildiğinde tabanı, üs göstergelerinin çarpımı kadar üslendirilir, yani:
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (5)

ÖRNEK 10

Üssü üssüne yükselt (üslendir): a) $(2^4)^3$ b) $[(-7)^7]^7$ c) $[(-0{,}25)^8]^{12}$ d) $(x^7)^5$

a) $(2^4)^3 = 2^{12}$ b) $[(-7)^7]^7 = (-7)^{49}$ c) $[(-0{,}25)^8]^{12} = (-0{,}25)^{96}$ d) $(x^7)^5 = x^{35}$

SORU 8

Bir şirket küçük bir kutuya 2^2 şeker, bir orta kutuya 2^2 küçük kutu ve son olarak büyük bir kutuya 2^2 orta kutu yerleştirmiştir.

a) Şirketin paketlediği şekerlerin sayısını önce tabanı 2^2 olacak şekilde, sonra da tabanı 2 olacak şekilde üs biçiminde yaz.

b) Şirketin paketlediği şekerlerin sayısını hesapla.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. İfadeyi hesap makinesi kullanarak sadeleştir:
   a) $2^5 \cdot 2^4$ b) $(0{,}6)^4 : (0{,}6)^2$ c) $8^4 \cdot 0{,}25^4$ d) $(-12)^5 : 6^5$ e) $(-8^5)^4$

2. İfadeyi sadeleştir:
   a) $15x^8 \cdot 3x^2$ b) $32y^4 : (8y^2)$ c) $(3ac^3)^7$ d) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$
   e) $(a^3)^6 : (a^4)^3$ f) $x^7 \cdot x^3 : x^4$ g) $(y^7 + 2y^2z) : y$ h) $c^x(c^{x+1} + c^x) - c^{x+2}(c^{x+3} - c^x)$

3. n ve m değerlerini bul, eğer:
   a) $x^m \cdot x^n = x^9$ ve $x^m : x^n = x$ b) $x^m : x^n = x$ ve $x^m \cdot x^n = x^7$

4. STEM kulübü bir güç bankası tasarlamıştır. Bir pil hücresi 1 birim güç sağlar. Güç bankasının bir katmanında 2^3 pil hücresi bağlıdır. Güç bankasında 2^4 güç katmanı bağlıdır. Toplam ne kadar güç mevcuttur? Çözümü önce üs biçiminde yaz, sonra değerini hesapla.

5. Kimyasal çözeltinin derişimi 5^5 mmol/L'dir. Seyreltmeden sonra derişim 5^2 mmol/L'ye düşer. Derişim kaç kat azalmıştır? Çözümü üs göstergesi 5 olan bir üs olarak yaz.

6. Bir inşaat firmasında 3^3 kamyon vardır. Her kamyona 4^3 çuval çimento yüklenmiştir. Firma toplam kaç çuval çimento yüklemiştir?

7. Tarife göre 2 pasta yapmak için 6 bardak süt gereklidir. Her iki miktarı da üs göstergesi 3 ile üslendirirsek, yeni tarifte 1 pasta yapmak için kaç bardak süt gerekecektir?

8. Bir kütüphanede, bir rafta 3^2 kitap dizilidir, bir bölmede 3^2 raf dizilidir ve bir açık dolapta 3^2 bölme dizilidir. Kütüphanede kaç kitap dizilmiştir? Çözümü önce 3^2 tabanında üs biçiminde, sonra 3 tabanında üs biçiminde ifade et ve değerini hesapla.

ARAŞTIRMA

Ador, 257^8'in değerini aşağıdaki yöntemle tahmin etmiştir:

$200 < 257 < 300$

$2 \cdot 100 < 257 < 3 \cdot 100$

$2^8 \cdot 100^8 < 257^8 < 3^8 \cdot 100^8$

$10^2 \cdot 100^8 < 257^8 < 10^4 \cdot 100^8$

$10^{18} < 257^8 < 10^{20}$

Araştır ve, üssün hangi iki sayı arasında yer aldığını belirleyeceğin başka bir yöntem keşfet:

a) 426^4 b) 344^6 c) 1567^3 d) 6783^5 e) 25075^7

2.4. Üs Göstergeci Tam Sayı Ve Rasyonel Sayı Olan Üslü Ifade

Üs Göstergeci Negatif Tam Sayı Ya Da Sıfır Olan Üslü Ifade

Şimdiye kadar üslü göstergeçleri doğal sayılar olan durumları inceledik. Ancak, aynı tabanlı üslü ifadeleri böldüğümüzde, üslü göstergeçler için belirtilmiş kısıtlama olmaksızın aynı kurala göre, ortaya çıkan üslü göstergeç negatif bir sayı ya da sıfır olabilir.

ETKİNLİK

2^{-3} ne olabilir? Doğal üs için geçerli kuralları izleyerek, negatif tam sayılı üs ile nasıl üslü ifade elde edilebilir?

$2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3}$ $\qquad 2^5 : 2^8 = \frac{2^5}{2^8} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$

3^0 ne olabilir? Sence, sıfır üssüyle üslü ifade nasıl tanımlanabilir ki, bu durum bildiğimiz kurallarla uyumlu olsun?

$3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$ $\qquad 3^4 : 3^4 = \frac{3^4}{3^4} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 1$

- Herhangi bir gerçek sayı $a \neq 0$ için, üslü ifade a^0 bire eşittir, yani $a^0 = 1$.
- Herhangi bir gerçek sayı $a \neq 0$ ve herhangi bir doğal sayı n için, üslü ifade a^{-n} üslü ifade a^n'in karşıt değeridir, yani $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

ÖRNEK 1

Hesapla: a) 4^{-3} b) 12^0

a) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ Biz 4^3'ün karşıt (ters) değerini arıyoruz.

b) 12^0 Herhangi bir sıfırdan farklı sayı, sıfırıncı kuvvette 1'e eşittir.

Kuvvetin sıfır ya da negatif tam sayı üsleri için kabul edilen tanımlarla, bu ifadeler üzerindeki işlem kuralları, pozitif doğal sayı üsleri için geçerli olan kurallarla aynıdır.

Herhangi iki gerçek sayı $a \neq 0$ ve $b \neq 0$, ve herhangi iki $n, m \in \mathbb{Z}$ için geçerlidir:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

ÖRNEK 2

Hesapla: a) $3^{-3} \cdot 3^4$ b) $3^4 : 3^7$ c) $3^{-2} \cdot 4^{-2}$ d) $2^{-4} : 8^{-4}$ e) $(2^3)^{-2}$

a) $3^{-3} \cdot 3^4 = 3^{-3+4} = 3^1 = 3$

b) $3^4 : 3^7 = 3^{4-7} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

c) $3^{-2} \cdot 4^{-2} = (3 \cdot 4)^{-2} = 12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$

d) $8^{-4} : 2^{-4} = (8 : 2)^{-4} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$

e) $(2^3)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

ÖRNEK 3

Hesapla a) $6a^{-4} \cdot 7a^2$ b) $35b^4 : (7b^2)$ c) $\left(\frac{3}{q^2}\right)^{-3}$

a) $6a^{-4} \cdot 7a^2 = (6 \cdot 7)a^{-4+2} = 42a^{-2} = \frac{42}{a^2}$

b) $35b^4 : (7b^2) = (35 : 7)b^{4-2} = 5b^2$

c) $\left(\frac{3}{q^2}\right)^{-3} = \left(\frac{q^2}{3}\right)^3 = \frac{q^6}{3^3} = \frac{q^6}{27}$

Bir kesir, negatif tam sayı üssüyle üslendirilirken, onun karşıt (ters) değeri, üssün zıt işaretli değeriyle üslendirilir.

ÖRNEK 4

Bakteri kültürü, antibiyotik eklendikten sonra her saat başına yarıya inmektedir.
Eğer şu anda 320 bakteri varsa, 5 saat sonra kültürde kaç bakteri olacaktır?

$$320 \cdot 2^{-5} = 320 \cdot \frac{1}{2^5} = 320 \cdot \frac{1}{32} = 10 \text{ Bakteri}$$

5 saat sonra kültürde 10 bakteri olacaktır.

Üssü Rasyonel Sayı Olan Kuvvet

ETKİNLİK

Biliyoruz ki, örneğin,
$4^{\frac{1}{2}} = 2$, çünkü $2^2 = 4$ $\quad (-27)^{\frac{1}{3}} = -3$, çünkü $(-3)^3 = -27$.
Aynı şekilde düşünürsek, $16^{\frac{1}{4}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $(-243)^{\frac{1}{5}}$ ve $64^{\frac{1}{6}}$ ne olacaktır?
Peki $(-4)^{\frac{1}{2}}$ mevcut mudur?
Daha önce söylediğimiz gibi:

- Eğer a negatif olmayan bir gerçek sayı ve $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, ise, o zaman negatif olmayan sayı $a^{\frac{1}{n}}$ öyle ki $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ bu sayı a'nın üs göstergesi $\frac{1}{n}$ olan kuvvetidir.
- Eğer a gerçek sayı ve n = 2k+1, k ∈ N ise, o zaman gerçek sayı $a^{\frac{1}{n}}$ öyle ki $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ bu sayı a'nın üs göstergesi $\frac{1}{n}$ olan kuvvetidir.

Dikkat edelim ki, $a^{\frac{1}{n}}$ mevcut değildir eğer $a < 0$ ve $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, çünkü hiçbir sayı kendisiyle çift kez çarpıldığında negatif bir sayı vermez.

ETKİNLİK

Kayıtta $4^{\frac{3}{2}}$ ifadesindeki üs göstergesi nasıl bir sayıdır? Hesaplamayı açıkla:

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Tekrar şu soruyu soruyoruz: rasyonel sayı ile nasıl üs alabiliriz ki, bu durum tam sayı üsleri için geçerli olan kurallara uygun olsun.



Varsayalım $a > 0$ ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ ve $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$). Üs göstergesi rasyonel sayı $\frac{m}{n}$ olan a sayısının kuvveti şu şekilde tanımlanır: $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

Varsayalım $a \neq 0$ ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ ve $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$). Üs göstergesi rasyonel sayı $\frac{m}{n}$ olan a sayısının kuvveti şu şekilde tanımlanır: $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

ÖRNEK 5

Hesapla: a) $32^{\frac{1}{5}}$ b) $27^{-\frac{1}{3}}$

a) $32^{\frac{2}{5}} = (32^{\frac{1}{5}})^2 = 2^2 = 4$ Tanıma göre rasyonel üs ile kuvvet

b) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}$ Burada $27^{-\frac{1}{3}}$'ün karşıt (ters) değerini arıyoruz.

Tanıma göre, rasyonel üs ile kuvvet için kurallar, üssü tam sayı olan kuvvetlerin kurallarıyla aynıdır. **Bu durum, üslendirme anlamlı olduğu her durumda geçerlidir.**

Herhangi iki gerçek sayı $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ için ve herhangi iki $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, burada $m, p \in \mathbb{Z}$ n, $q \in \mathbb{N}$, aşağıdakiler geçerlidir:

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$ $(a : b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$ $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$

ETKİNLİK

Neden $8^{\frac{2}{3}}$ ifadesini iki şekilde hesaplayabileceğimizi açıkla

$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

Üssün üssü kuralından şu sonuç çıkar: $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

ÖRNEK 6

Basitleştir: a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ b) $7^{\frac{1}{6}} : 7^{\frac{1}{3}}$ c) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{5}}$ d) $16^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}}$ e) $(3^{\frac{1}{5}})^{\frac{3}{4}}$

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$ b) $7^{\frac{1}{6}} : 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 7^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{6}}}$

c) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} = (3 \cdot 7)^{\frac{1}{5}} = 21^{\frac{1}{5}}$ d) $16^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}} = (16 : 8)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$ e) $(3^{\frac{1}{5}})^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{20}}$

ÖRNEK 7

Basitleştir: a) $5a^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{1}{2}}$ b) $42a^{\frac{7}{2}} : (6a^{\frac{3}{4}})$ c) $\left(\frac{3}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

a) $5a^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{1}{2}} = (5 \cdot 4)a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = 20a^{\frac{7}{6}}$

b) $42a^{\frac{7}{2}} : (6a^{\frac{3}{4}}) = 7a^{\frac{7}{2}-\frac{3}{4}} = 6b^{\frac{11}{4}}$

c) $\left(\frac{3}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{c^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{c^3}{3^{\frac{3}{2}}}$

Bir kesir, negatif rasyonel üs ile üslendirilirken, onun karşıt (ters) değeri, üssün zıt işaretli değeriyle üslendirilir.

ÖRNEK 8

Bir tavşan popülasyonu, 5 yıllık bir dönem boyunca başlangıç sayısının 4 tabanlı bir kuvveti olacak sayıya artar ve başlangıç tavşan sayısı 4'tür. 15 yıl sonra, yaşam alanında 256 tavşan vardı. 10 yıl sonra kaç tavşan vardı?

15 yıl, 5'er yıllık 3 dönemdir, 10 yıl ise 2 dönemdir.

3 dönemden sonra 256 tavşan vardı. Demek ki $4 \cdot 4^{\square} = 256$, ve aranan sayı $4 \cdot 4^{\square}$.

2 dönemden sonra $4\left(\frac{256}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot 64^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$ tavşan vardı.

10 yıl sonra 64 tavşan vardı.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Hesapla:

   a) $7 \cdot 7^{-1}$ b) $4^3 \cdot 4^4 : 4^9$ c) $\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^9}$ d) $\frac{10^6 \cdot 10^4}{(10 \cdot 10^2)^2}$

2. Hesapla:

   a) $32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{4}{5}}$ b) $\left(\frac{1}{27^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-3}$ c) $16^{\frac{7}{4}} : 16^{\frac{1}{2}}$ d) $(25^{-\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}$

3. Basitleştir:

   a) $8q^7 \cdot 4q^{-30}$ b) $32y^6 : 4y^{-3}$ c) $\left(\frac{6}{t}\right)^{-3}$ d) $(c^2)^{-3}$

4. Basitleştir:

   a) $14x : (7x^{-\frac{2}{3}})$ b) $4x^{-\frac{4}{3}} \cdot 7x^{-\frac{2}{3}}$ c) $2a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} : 5a^{\frac{1}{3}}$ d) $(8a^{-3} : (27b^9))^{-\frac{1}{3}}$

5. p ve q değerlerini bul, eğer

   a) $x^p : x^q = x$ ve $x^p \cdot x^q = x^{-7}$ b) $x^p \cdot x^q = x^{\frac{9}{2}}$ ve $x^p : x^q = x^{\frac{11}{2}}$

6. Telefon bataryasının yüzde kapasitesi, video izlerken ilk 3 saat boyunca her saat yarıya inmektedir, daha sonra hızla tükenir. Başlangıç kapasitesi %80 ise, 3 saat geçtikten sonra kalan kapasite ne kadar olacaktır?

7. Mavi taş (bakır sülfat pentahidrat) kristalleşmesi sırasında, oluşan kristalin kütlesi her 2 saatte bir iki katına çıkar. 6 saat sonra kristalin kütlesi 64 gramdır. 4 saat sonra kristalin kütlesi ne kadar olmuştur?

8. Bir enerji depolama şirketi, rüzgâr santralindeki pil sayısını artırmaktadır. Pil sayısı her 3 yılda bir, yeni sayı başlangıç sayısının 2k üssü olacak şekilde $2k$ (a^2, a^4, a^6, ...) artar. 9 yıl sonra pil sayısı 729'dur. 6 yıl sonra kaç pil vardı?

9. x^{39}'a eşit beş ifade yaz. Aynı tabanlı üslü işlemlerin tümünü kullanmaya çalış ve en az bir terimde negatif üs göstergesi veya rasyonel üs göstergesi kullan.

2.5. Sayıların Üstel Biçimde Gösterilmesi

3651 sayısını, çarpanlardan biri tabanı 10 ve pozitif üs göstergesi olan bir kuvvet olacak şekilde, iki sayının çarpımı biçiminde birkaç farklı yolla yazabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} 3651 &= 3651 \cdot 1 && = 3651 \cdot 10^0 \\ &= 365{,}1 \cdot 10 && = 365{,}1 \cdot 10^1 \\ &= 36{,}51 \cdot 100 && = 36{,}51 \cdot 10^2 \\ &= 3{,}651 \cdot 1000 && = 3{,}651 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Aynı sayıyı, çarpanlardan biri tabanı 10 ve negatif üs göstergesi olan bir kuvvet olacak şekilde de yazabiliriz.

$$\begin{aligned} 3651 &= 3651 \cdot 1 && = 3651 \cdot 10^0 \\ &= 36510 \cdot 0{,}1 && = 36510 \cdot 10^{-1} \\ &= 365100 \cdot 0{,}01 && = 365100 \cdot 10^{-2} \\ &= 3651000 \cdot 0{,}001 && = 3651000 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

3651 sayısının $3{,}651 \cdot 10^3$ biçiminde yazılışına özgü olan nedir?



Gerçek bir sayı x için, onun **üstel biçimde** yazımı şöyledir:

$$x = A \cdot 10^n$$

Burada n bir tam sayıdır ve A, $1 \leq |A| < 10$ koşulunu sağlayan bir gerçek sayıdır.
Bu yazımda A sayısına **mantisa** veya **ana kısım** denir.

Bu tür sayı yazımını, çok büyük ya da çok küçük sayıların yazımında sıkça kullanırız.

ÖRNEK 1

Üstel biçimde verilmiş sayıyı ondalık (desimal) biçimde yaz:
a) $3 \cdot 10^4$ b) $6{,}52 \cdot 10^6$ c) $7 \cdot 10^{-2}$ d) $8{,}434 \cdot 10^{-3}$

Bir sayıyı üstel biçimden ondalık biçime yazmak için, mantisayı üssün değeriyle çarparız. Böylece buluruz ki:

a) $3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10\,000 = 30\,000$

b) $6{,}52 \cdot 10^6 = 6{,}52 \cdot 1\,000\,000 = 6\,520\,000$

c) $7 \cdot 10^{-2} = 7 \cdot 0{,}01 = 0{,}07$

d) $8{,}434 \cdot 10^{-3} = 8{,}434 \cdot 0{,}001 = 0{,}008434$

ÖRNEK 2

Sayının üstel biçimini yaz:

a) 723 b) 1827,45 c) 0,0006 d) 0,00000127

Birinci adım: Ondalık virgülü öyle kaydırırız ki, solunda yalnızca bir sıfırdan farklı rakam kalsın. Elde edilen sayı [1, 10) aralığında olur ve bu sayı mantisadır.

İkinci adım: Ondalık virgülü kaç basamak kaydırdığımızı sayarız. Bu sayı, üs olarak yazılır.

Kurala göre buluruz ki:

a) $723 = 7{,}23 \cdot 10^2$ (Ondalık virgülü sola kaydırdık.)

b) $1827{,}45 = 1{,}82745 \cdot 10^3$ (Üs (3) pozitiftir.)

c) $0{,}0006 = 6 \cdot 10^{-4}$ (Ondalık virgülü sağa kaydırdık.)

d) $0{,}00000127 = 1{,}27 \cdot 10^{-6}$ (Üs (−6) negatiftir.)

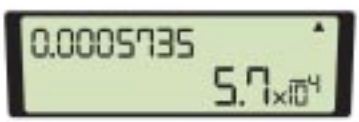
SORU 1

Işığın hızı yaklaşık olarak 3 · 10^8 m/s'dir.

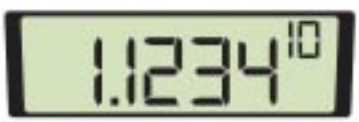
a) Ölçüm sayısını ondalık biçimde yaz.

b) Işığın hızı km/s cinsinden ne kadardır? Ölçüm sayısını üstel biçimde yaz.

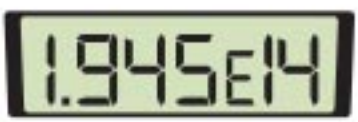
Hesap makinesi tipinden bağımsız olarak, sayıların üstel biçimde gösterimi, mantisanın ekranın orta kısmında ve üssün mantisanın sağında gösterilmesiyle yapılır. Şekil 1'de üs sağ alt köşede, Şekil 2'de ise sağ üst köşede gösterilmiştir. Ayrıca, bazı hesap makinelerinde taban 10 için mantisanın devamında E sembolü de kullanılabilir; bu durum Şekil 3'te gösterilmiştir.



Resim 1



Resim 2



Resim 3

ÖRNEK 3

İfadenin değerini hesapla ve üstel biçimde yaz:

a) $(4{,}5 \cdot 10^{-6}) + (4 \cdot 10^{-6})$ b) $(9{,}3 \cdot 10^2) - (2{,}1 \cdot 10^2)$

c) $(3 \cdot 10^5) \cdot (5 \cdot 10^{-5})$ d) $(5{,}2 \cdot 10^2) : (2 \cdot 10^6)$,

Çözümler hesap makinesi kullanılmadan elde edilmiştir.

Hesap makinesi yardımıyla kontrol et.

a) $(4{,}5 \cdot 10^{-6}) + (4 \cdot 10^{-6}) = (4{,}5 + 4) \cdot 10^{-6}$
$= 8{,}5 \cdot 10^{-6}$

Mantisa kurala göre toplanır, yani ortak çarpan dışarı alınır.

b) $(9{,}3 \cdot 10^{2}) - (2{,}1 \cdot 10^{2}) = (9{,}3 - 2{,}1) \cdot 10^{2}$
$= 7{,}2 \cdot 10^{2}$
Çıkanın mantisasından çıkarılanın mantisası çıkarılır.

c) $(3 \cdot 10^{3}) \cdot (5 \cdot 10^{-5}) = 15 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-5}$ — Mantisalar çarpılır.
$= 15 \cdot 10^{3-5}$ — Aynı tabanlı kuvvetleri çarpma kuralı kullanılır.
$= 15 \cdot 10^{-2}$
$= 1{,}5 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-2}$ — Sayıyı üstel biçimde yazma kuralı uygulanır.
$= 1{,}5 \cdot 10^{-1}$

d) $(5{,}2 \cdot 10^{2}) : (2 \cdot 10^{4}) = 2{,}6 \cdot 10^{2} : 10^{4}$ — Bölünenin mantisası bölenin mantisasına bölünür.
$= 2{,}6 \cdot 10^{2-4}$ — Aynı tabanlı kuvvetleri bölme kuralı kullanılır.
$= 2{,}6 \cdot 10^{-2}$

SORU 2

Bir fabrika, kenarları $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ m ve $7{,}2 \cdot 10^{-3}$ m olan dikdörtgen şeklinde bilgisayar parçaları üretmektedir.

a) Bilgisayar parçasının alanını metrekare cinsinden hesapla. Sonucu üstel biçimde yaz.

b) Bilgisayar parçasının çevresini metre cinsinden hesapla. Sonucu üstel biçimde yaz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Üstel biçimde verilen sayıyı ondalık biçimde yaz.

a) $5 \cdot 10^{1}$ b) $9 \cdot 10^{4}$ c) $1{,}5 \cdot 10^{6}$ d) $3{,}142 \cdot 10^{3}$ e) $9{,}1909 \cdot 10^{8}$
f) $7 \cdot 10^{-2}$ g) $8 \cdot 10^{-1}$ h) $1{,}27 \cdot 10^{-4}$ i) $7{,}213 \cdot 10^{-3}$ j) $2{,}111 \cdot 10^{-7}$

2. Sayıyı üstel biçimde yaz.

a) 70 000 b) 650 c) 17 200 000 d) 181 856 e) 2372,4
f) 0,6 g) 0,0007 h) 0,010101 i) 0,00000057 j) 0,0000000202

3. Bir ülkedeki nüfus 2 081 012'dir.
Bu sayıyı üstel biçimde yaz.

4. Yaklaşan Dünya Futbol Şampiyonası için stadyum inşaatı yaklaşık 4 milyar dolara mal olacaktır (1 milyar, üstel biçimde $1 \cdot 10^{9}$ olarak yazılır).

a) Sayıyı üstel biçimde yaz.

b) Tamamlanması gereken kalan işin maliyeti 0,429 milyar dolardır.
Bu sayıyı üstel biçimde yaz.

5. İfadenin değerini hesapla ve üstel biçimde yaz:
   a) $(4 \cdot 10^2) + (2 \cdot 10^2)$ b) $(4 \cdot 10^3) - (2 \cdot 10^3)$
   c) $(4 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^2)$ d) $(4 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^2)$

6. Dünyanın kütlesi $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg'dır. Dünyanın ortalama yoğunluğu 5515 kg/m^3'tür.
   (hacim = kütle : yoğunluk)
   a) Dünyanın hacmini metreküp cinsinden hesapla.
   b) Sonucu ondalıkta 2 basamağa kadar yuvarlayarak üstel biçimde yaz.

7. Drita, $(7 \cdot 10^5) - (5 \cdot 10^5) = (2 \cdot 10^0)$ der. Valon, $(7 \cdot 10^5) - (5 \cdot 10) = (2 \cdot 10^5)$ der.
   Kim haklıdır? Cevabı gerekçelendir.

8. Tabloda, bir ülkedeki en büyük beş kentsel bölgenin 2020 yılındaki nüfusu ve alanları (km^2 cinsinden) verilmiştir.
   Nüfus yoğunluğu, 1 km^2 başına düşen nüfus sayısıdır.

Bölge	Nüfus	Yüzölçümü (km^2)
A	$1{,}35 \cdot 10^5$	$1{,}09 \cdot 10^2$
B	$3{,}90 \cdot 10^5$	$6{,}08 \cdot 10^2$
C	$2{,}03 \cdot 10^5$	$8{,}77 \cdot 10^2$
D	$1{,}24 \cdot 10^5$	$3{,}75 \cdot 10^2$
E	$3{,}90 \cdot 10^5$	$4{,}44 \cdot 10^2$

   a) Bölgeleri nüfus büyüklüğüne göre, en kalabalıktan başlayarak sırala.
   b) Bölgeleri yüzölçümü büyüklüğüne göre, en büyükten başlayarak sırala.
   c) Her bölge için nüfus yoğunluğunu hesapla.
   d) Bölgeleri nüfus yoğunluğuna göre, en yoğun olandan başlayarak sırala.

ARAŞTIRMA

10 çok küçük ve 10 çok büyük gerçek değer topla; örneğin Dünya'nın kütlesi, bir pirinç tanesinin kütlesi, atom çekirdeğinin çapı, Dünya ile Güneş arasındaki mesafe, ışığın hızı, bir otomobilin hızı, Samanyolu'ndaki yıldız sayısı, Dünya'nın nüfusu vb.

a) Her değeri üstel biçimde yaz.

b) Bunları, üs göstergesinden başlayarak en büyükten en küçüğe doğru sırala.

c) Bazı büyüklüklerin oranını hesapla; örneğin Dünya'nın kütlesi bir kum tanesinin kütlesinden kaç kat daha büyüktür.

d) Sonuçları tablolar ve diyagramlarla göster ve açıkla.

e) Üstel biçimin neden bilimde, özellikle astronomi, fizik ve kimyada çok yararlı olduğunu açıkla.

2.6. Cebirsel Rasyonel Ifadeler

Tam Ve Kesirli Rasyonel Ifadeler

ETKİNLİK

a) 0; 1,5; 2; 4,5 ve 9 sabitleriyle, toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve tam sayı üs ile üslendirme işlemlerini içeren sayısal bir ifade yaz. Yazdığın ifadenin değerini hesapla.

b) 2; 3,5; 4 ve 9 sabitleri ile x, y, z ve t değişkenlerini kullanarak, toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve tam sayı üs ile üslendirme işlemlerini içeren sayısal bir ifade yaz.



Rasyonel cebirsel ifade, sonlu sayıda sabit ve değişkenin, toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve tam sayı üs ile üslendirme işlemlerinin işaretleriyle bağlandığı ve anlamlı olan bir dizidir.

ÖRNEK 1

$a + b$, $\frac{m^2+5}{m-n}$ ve $\frac{1}{p+3}$ ifadeleri rasyonel cebirsel ifadelere örnektir.

SORU 1

Kenarları $4x$, $2x$ ve $3x$ olan bir üçgenin çevresini hesaplamak için bir ifade yaz.

Cebirsel ifade yalnızca sabitlerden, hatta sadece bir sabitten veya yalnızca bir değişkenden de oluşabilir. Örneğin: a; 1; 7,2 bunları da cebirsel ifade olarak kabul ederiz.
Yalnızca sabitleri içeren cebirsel ifadelere **sayısal ifadeler** denir.
Bir cebirsel ifadede değişkenlerin yerine uygun değerler konulup belirtilen işlemler yapıldığında elde edilen sayı, ifadenin **sayısal değeri** olarak adlandırılır.

ÖRNEK 2

İfadenin sayısal değeri:

a) $3x - 1$ için $x = 1$ olduğunda: $3 \cdot 1 - 1 = 2$ b) $3a^3 + 5a$ için, $a = 2$ olduğunda: $3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 = 34$

SORU 2

Rasyonel ifadenin sayısal değerini hesapla:

a) $4x + 5y$, için $x = -4, y = 5$ b) $\frac{x-3y}{3xy}$, için $x = 6, y = -5$ c) $\frac{4x-3z}{3-xy}$, için $x = 4, y = -3, z = 0$



Değişken ile bölme işleminin ya da değişken içeren bir ifade ile bölme işleminin bulunmadığı rasyonel cebirsel ifadelere, **tam rasyonel cebirsel ifadeler** denir.

ÖRNEK 3

İfadeler $2a^2b - 1$, $5x^2 - 3xy$, $\frac{4x}{3}$, $\frac{a^2 - 2b}{4}$ tam rasyonel cebirsel ifadelere örnektir.

Değişken ile bölme işlemi ya da değişken içeren bir ifade ile bölme işlemi bulunan rasyonel cebirsel ifadelere, **kesirli rasyonel ifadeler** denir.

ÖRNEK 4

$\frac{2a-1}{b}$, $\frac{x}{y-2}$ ve $\frac{5a}{2b} + 4c$ ifadeleri, değişken ile bölme ya da değişken içeren bir ifade ile bölme içerdiğinden, kesirli rasyonel ifadelere örnektir.

ÖRNEK 5

Kesirli rasyonel ifade $\frac{30}{x-4}$'te, değişken x değeri 4 olamaz, fakat x herhangi başka bir gerçek değer alabilir. Bunu şöyle yazarız: $\frac{30}{x-4}$, $x \neq 4$.

Bir rasyonel cebirsel ifadede değişkenlerin alabileceği değerlere **değişkenlerin kabul edilen (izin verilen) değerleri** denir.

SORU 3

Herhangi bir tam rasyonel ifadede, değişkenlerin kabul edilen değerler kümesi nedir?

Aynı kabul edilen değerler kümesine sahip olan ve değişkenlerin tüm bu değerleri için aynı sayısal değeri veren rasyonel ifadelere **özdeş (identik) rasyonel ifadeler** denir.

ÖRNEK 6

İfadeler

a) $3(a-4) + 7$ ve $3a - 5$ özdeştir. Çünkü a'nın herhangi bir değeri için aynı sayısal değere sahiptirler.

b) $\frac{a^2-4}{a+2}$ ve $a - 2$ özdeş değildir. Çünkü değişkenin kabul edilen değerler kümeleri aynı değildir.

c) $\frac{a^2-4}{a+2}$ ve $a - 2$ $a \neq -2$, için özdeştir. Çünkü her $a \neq -2$ değeri için aynı sayısal değere sahiptirler.

Tek Terimli İfadeler

ETKİNLİK

Verilen rasyonel ifadelerden hangileri: $2x^2y$, $x + 1$, a, 5, $3abc + 7c$, $-0{,}4z$, $m^2 + 5m + 3$ sadece doğal sayılarla çarpma ve üs alma işlemlerini içerir?



Tam rasyonel cebirsel ifade, yalnızca çarpma ve üs alma (doğal sayı üs ile) işlemlerini içeriyorsa **tek terimli ifade** olarak adlandırılır.

ÖRNEK 7

$5x$, $-2a^2b$, $-2m$ ve $\frac{3}{4}ab^2$ ifadeleri tek terimli ifadelere örnektir.

Üs alma işlemi, çarpma işleminin özel bir durumu olduğundan, tek terimli ifade, yalnızca çarpma işlemini içeren tam rasyonel ifade olarak da tanımlanabilir.

Tanıma göre, yalnızca bir sabitten veya yalnızca bir değişkenden oluşan her ifade de tek terimli ifadedir, çünkü tek terimli ifadenin çarpma işlemini içermesi zorunlu değildir.

ÖRNEK 8

a) x, -2, $-m$ ve 0,5 ifadeleri tek terimli ifadelerdir.

b) $\frac{4ab^2}{5}$ ifadesi de tek terimli ifadedir, çünkü şu biçimde yeniden yazılabilir: $\frac{4ab^2}{5} = \frac{4}{5}ab^2 = 0{,}8ab^2$.

ÖRNEK 9

$\frac{-2ab^2 \cdot 3x^2y}{5} = -\frac{6}{5}ab^2x^2y$

Eğer tek terimli ifade birkaç sabit çarpan içeriyorsa, bu sabitlerin çarpımı, değişkenlerin çarpımının önüne yazılabilir.



Tek terimli ifadede değişkenlerin önünde bulunan sabite, **tek terimli ifadenin katsayısı** denir.

Tek terimli ifadede değişkenlerin çarpımına, **tek terimli ifadenin ana değeri** denir.

Tek terimli ifadede yer alan değişkenlerin üslerinin toplamına, **tek terimli ifadenin derecesi** denir.

ÖRNEK 10

a^2b, $-3x$, $\frac{4}{5}ab^2c$ **ve** $-0{,}5t$ ifadelerinin tek terimli katsayıları sırasıyla 1, -3, $\frac{4}{5}$ ve $-0{,}5$'tir.

Tek terimlilerin ana değerleri sırasıyla a^2b, x, ab^2c ve t'dir.

Tek terimlilerin dereceleri sırasıyla 3, 1, 4, 1'dir.



Ana değerleri aynı olup yalnızca katsayıları farklı olan tek terimli ifadelere **benzer tek terimliler** denir.

Katsayıları birbirinin zıt sayısı olan iki benzer tek terimli ifadeye ise **zıt tek terimliler** denir.

ÖRNEK 11

a) Tek terimliler $-3a^2b$, $0{,}6a^2b$, $2a^2b$, $\frac{3}{4}a^2b$ ve $-a^2b$, benzer tek terimlere örnektir.

b) Tek terimliler $7ab^2$ ve $-7ab^2$, zıt tek terimlere örnektir.

SORU 4

Tek terimlinin katsayısını, ana değeri ve derecesini yazınız:

a) $-2a^2b^3$ b) $3{,}9x^5y^7$ c) $-2{,}5pq$ d) $\frac{2a^2x^4}{3}$ e) $-x^2yz$

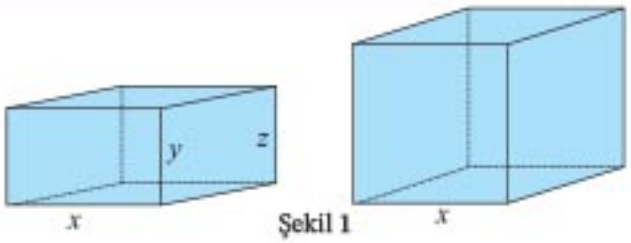
SORU 5

Ses dalgasının enerjisi, t saatlik sürede $7t^4$ joule (J) değerindedir.
7 saat sonra ses dalgasının enerjisi ne olacaktır?

Polinomlar

ETKİNLİK

Bir küp ve bir dikdörtgenler prizması verilmiştir (Şekil 1). Küpün kenar uzunluğu x, dikdörtgenler prizmasının kenar uzunlukları x, y ve z ise, iki şeklin toplam alanı ne kadardır?



Şekil 1

Kesin olarak şu sonuca varabilirsin: şekillerin toplam alanını belirlemek için, onların alanlarının toplamını bulmak gerekir:

$P_1 = 6x^2$	küpün alanı
$P_2 = 2xy + 2yz + 2xz$	dikdörtgenler prizmasının alanı
$P = P_1 + P_2$	toplam alan
$P = 6x^2 + 2xy + 2yz + 2xz$	toplam alan için ifade tek terimlerin toplamıdır.

Sonlu sayıda tek terimlinin cebirsel toplamına polinom denir.

ÖRNEK 12

İfadeler $3a - 2ax + a^2b^2 - bx$ ve $4ax - 3by + x^2y^2$ polinomlara örnektir.

Polinomu oluşturan tek terimlilere polinomun terimleri denir.
İki terim içeren polinoma binom, üç terim içeren polinoma trinom denir vb.

ÖRNEK 13

a) İfadeler $a + 2b$ ve $x^2 + 5y$ binomlardır.

b) İfadeler $3a^2 + 2a + 1$ ve $x^2 - 2xy + 3y$ trinomlardır.

Her tek terim, yalnızca bir terimli bir polinom olarak kabul edilebilir.
Öte yandan, her polinom bir veya birkaç değişken içerebilir.

ÖRNEK 14

Polinom $5a^2 - 2a^3 + 3a^4 - a + 4$ yalnızca bir değişkeni farklı derecelerde içerir.

$3a^4 - 2a^3 + 5a^2 - a + 4$	Değişme (komütatif) yasası gereği, terimleri değişkenin azalan derecelerine göre sıralanabilir.
$4 - a + 5a^2 - 2a^3 + 3a^4$	Benzer şekilde, terimleri değişkenin artan derecelerine göre de sıralanabilir.



Polinomda yer alan sabitlere **polinomun katsayıları** denir.
En yüksek dereceli terimin derecesine **polinomun derecesi** denir.

ÖRNEK 15

$3x^3 - 4x^2 + 5$ Polinomun katsayıları sayılar 3, –4 ve 5'tir.
Polinomun derecesi 3'tür.

ÖRNEK 16

$$\underline{3a^2} - \underline{b^2} - \underline{5a^2} + \underline{4b^2} = (3a^2 - 5a^2) + (-b^2 + 4b^2)$$
$$= (3 - 5)a^2 + (-1 + 4)b^2$$
$$= -2a^2 + 3b^2$$

Bir polinomda birkaç benzer terimin cebirsel toplamının onların yerine aynı olan tek bir terimle değiştirilmesine, polinomun benzer terimlerinin indirgenmesi denir.

SORU 6

Ses dalgasının genliği A, t saniye süresince $t^2 - 5t + 6$ desibel ile verilmektedir.
5 saniye sonra genliğin büyüklüğü (desibel cinsinden) ne olacaktır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki ifadede değişkenlerin alabileceği geçerli değerler kümesini bulun:

a) $\frac{a+5}{a-3}$ b) $\frac{x^2+2x-1}{x+2}$ c) $\frac{2ab}{a-b}$

2. Defterine geçir ve tabloyu doldur:

Tek Terim	$-4a^2b$	$2{,}5a$	$-cx^2$	$-\frac{x}{3}$	$\frac{2xy^2}{5}$
Tek Terimin Katsayısı					
Tek Terimin Ana Değeri					
Tek Terimin Derecesi					

3. Aşağıdaki tek terimlilerden hangileri benzerdir:
a) $-3ab$ b) $\frac{1}{2}a^2x$ c) ab d) $-a^2x$ e) $6a^2x$ f) $-7ax^2$ g) ax^2

4. Aşağıdaki tek terimin zıttını yazınız:
a) $-6ab$ b) a^2b^2 c) $-2ax$ d) $\frac{x}{3}$ e) $-x^2y$ f) $0{,}5a$

5. Defterine geçir ve tabloyu doldur:

Polinom	$-7x^2+9x$	$2{,}5a^5+7abc-5ab$	$x^3y-x^2y^2+2xy-3xy^2$
Polinomun Katsayıları			
Polinomun Derecesi			

6. İfadeler özdeş midir:
a) $a+b=a-(-b)$ b) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ c) $x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$

7. Polinomları sadeleştiriniz. a) $3ab-4a^2b^2-7ab^2+2ab^2-ab+4^2b^2$ b) $1{,}5a-2b+0{,}5b-0{,}3a-ab$

8. Kişlenen veri miktarı megabayt cinsinden $15h^3$ ifadesiyle verilmektedir.
3 saat için işlenen veri miktarı ne kadar olacaktır?

9. Bir bitkinin yüksekliği milimetre cinsinden, x hafta için e $2x^2+5x+6$ ifadesiyle verilmektedir.
5 hafta sonra bitkinin yüksekliği ne kadar olacaktır?

2.7. Toplama ve Çıkarma İşlemleriyle Tam Rasyonel İfadeler

Tek Terimlilerin ve Polinomların Toplanması

ETKİNLİK

Sayıların cebirsel toplamını yazınız: -15, 9, -6, 12 ve -7. Sonra, parantez kullanmadan kısaltılmış biçimini yazınız. Tek terimlerin toplamını bulalım: $7a^2$, $-5a$, $-3ab$, $2a$ ve $-ab$.

$7a^2+(-5a)+(-3ab)+2a+(-ab)$
$=7a^2-\underline{5a}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{2a}-\underline{\underline{ab}}$
$=7a^2-3a-4ab$

Tek terimlerin cebirsel toplamını yazarız.
Onu parantez ve toplama işaretleri kullanmadan kısaltılmış biçimde yazarız ve elde edilen polinomda benzer terimleri indirgeriz.

İki tek terim, sahip oldukları işaretlerle art arda yazılarak cebirsel toplam biçiminde toplanır. Daha sonra, gerekirse elde edilen polinomda indirgeme yapılır.

SORU 1

Tek terimlilerin toplamını bulunuz: $15x^2y$, $-5xy$, $-3xy^2$, $2x^2y$ ve $-xy$.

ÖRNEK 1

Polinomların toplamını bulunuz: $5a^2b + 2b$ ve $2a - 3a^2b$.

$(5a^2b + 2b) + (2a - 3a^2b)$ — Polinomların toplamını yazarız.

$(5a^2b + 2b) + (2a - 3a^2b) = \underline{5a^2b} + 2b + 2a - \underline{3a^2b}$
$= 2a^2b + 2b + 2a$

İlk polinoma, ikinci polinomun her terimini art ardaeklerizveeldeedilenpolinomdabenzerterimleri indirgeriz.

İki polinom, ilk polinoma ikinci polinomun tüm terimleri sahip oldukları işaretlerle art arda eklenerek toplanır. Daha sonra, gerekirse elde edilen polinomda indirgeme yapılır.

SORU 2

İki projektör sahneyi aydınlatmaktadır. Işık şiddeti, kaynaktan x metre uzaklıkta lümen cinsinden:
Projektör A'nın ışık şiddeti: $(9x^2 + 5x)$ lümen
Projektör B'nin ışık şiddeti: $(7x^2 + 3x + 6)$ lümen
İki projektörden gelen ışık şiddetinin toplamını bulunuz.

Polinomların Çıkarılması

ETKİNLİK

Bir rasyonel sayı b'nin bir rasyonel sayı a'dan çıkarılması, a sayısına b'nin zıt sayısının eklenmesi demektir. Yani: $a - b = a + (-b)$.
Bu şekilde düşünerek, farkı bulunuz:
a) sayı 7 ile sayı 5'in b) sayı 7 ile sayı -5'in c) sayı -7 ile sayı -5'in

ÖRNEK 1

Tek terim $5ab$ ile tek terim $4a^2$'nin farkını bulalım.

$5ab - (+4a^2) = 5ab + (-4a^2)$ — İstenen farkı toplam biçiminde yazarız.
$= 5ab - 4a^2$ — Tek terimleri toplama kuralına göre toplarız.

Bir tek terimden başka bir tek terim çıkarılırken, eksilen tek terime çıkarılan tek terimin zıt tek terimi eklenir. Daha sonra, gerekirse elde edilen polinomda indirgeme yapılır.

SORU 3

Tek terim $3ax$ ile tek terim $-2by$'nin farkını bulunuz.

ÖRNEK 2

Polinom $6ax - 5a$ ile polinom $3x^2 - 4ax$'in farkını bulunuz.

$$(6ax - 5a) - (+3x^2 - 4ax) = \underline{6ax} - 5a - 3x^2 + \underline{4ax}$$
$$= 10ax - 5a - 3x^2$$

Eksilen polinoma, çıkarılan polinomun her terimini zıt işaretle ekleriz ve elde edilen polinomda benzer terimleri indirgeriz.

Polinomlar, eksilen polinoma çıkarılan polinomun tüm terimleri zıt işaretlerle art arda eklenerek çıkarılır. Daha sonra, gerekirse elde edilen polinomda indirgeme yapılabilir.

SORU 4

Bir t on yıl sonra ağaçların boyu (cm cinsinden):
Meşe ağacının boyu: $(5t^2 + 4t + 3)$ cm
Kayın ağacının boyu: $(3t^2 + t + 7)$ cm
4 on yıl sonra meşe ağacının boyu ile kayın ağacının boyu arasındaki farkı bulunuz.

Parantezlerin kaldırılması ve kapatılması

Tek terim ve polinomların toplanması ve çıkarılmasında önce ifadeleri parantez içine alırız, sonra parantezleri kaldırırız.
Polinomların toplanması ve çıkarılması kurallarına dayanarak, **parantezlerden kurtulma** için şu kurallar çıkarılabilir.

Eğer parantezin önünde artı işareti (+) varsa, parantez kaldırılabilir ve parantez içindeki terimlerin işaretleri değişmeden kalır.
Eğer parantezin önünde eksi işareti (−) varsa, işaret ve parantez kaldırılabilir fakat parantez içindeki tüm terimler zıt işaretleriyle yazılmalıdır.

ÖRNEK 3

Parantezleri kaldırma kurallarına göre şöyle yaparız

$$3a - (2b - 5c) + (-5a + 4b - c) - (-7a + b - 8) = \underline{3a} - \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{5c}} - \underline{5a} + \underline{\underline{4b}} - \underline{\underline{c}} + \underline{7a} - \underline{\underline{b}} + 8$$
$$= 5a + b + 4c + 8$$

Bazen verilen bir polinomu veya onun bir kısmını parantez içine almak ve önüne artı (+) ya da eksi (−) işareti koymak gerekir. Bunu aşağıdaki **paranteze alma kurallarına** göre yaparız.

Eğer parantez içine aldığımız polinomun önüne artı işareti (+) koyarsak, o polinomun tüm terimleri işaretlerini korur.
Eğer parantez içine aldığımız polinomun önüne eksi işareti (−) koyarsak, o polinomun tüm terimlerinin işaretleri zıtlarına dönüşür.

ÖRNEK 4

Paranteze alma kurallarına göre şunlara sahibiz:

$3a - b + 5c = +(3a - b + 5c)$ parantezin önüne artı (+) işareti koyarız.

$3a - b + 5c = -(-3a + b - 5c)$ parantezin önüne eksi (−) işareti koyarız.

SORU 5

Parantezlerden kurtul ve ifadeyi sadeleştir:

$(5a^3 + 7b - 4bc) - [(5a^3 + 7b) - (8bc + 2ab^2 - 7)] + 12abc + 3.$

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Tek terimleri toplayın:

a) $7x^4, -5x^2, -4x^3, 6x^2$ ve $12x^4$ b) $-2xy, 7xy, 5xy$ ve $-3xy$

2. Polinomların toplamını yapın:

a) $(5x^2 - ax + a^2) + (3x^2 + 2ax - a^2) + (4ax - 3x^2 + 8)$

b) $(2a^4 + 3a^3b - 2a^2b^2 - ab^3) + (a^4 - a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3 - b^4)$

3. Verilen tek terimlerin çıkarma işlemini yapın:

a) $-5a - (+3a)$ b) $3x - (-2x)$ c) $2ab - (+2ab)$ d) $3ax - (-ax^2)$

4. Polinomların çıkarma işlemini yapınız:

a) $(6a^2x - 2ax^2 + 5) - (4a^2x + ax^2 - 3)$

b) $(x^3y - 2xy^2 + 3xy - 2) - (-4x^3y + xy - 3xy^2 + 5x^2y + 1)$

5. Parantezlerden kurtul ve ifadeyi sadeleştir:

a) $(2x^2 + 3y^2) - \{(x^2 - 2xy - y^2) + [3x^2 + 2xy - (-5xy + 2y^2)]\}$

b) $3x^2y - [xyz - (3xyz - x^2z) + [2x^2y - (5x^2y - 4xyz - x^2z)]]$

6. İfadenin değerinin içindeki değişkenlere bağlı olmadığını gösterin:

a) $x^2 + 2xy + y^2 - (4xy + 3x^2 - 5) + (2xy - y^2 + 2x^2 + 3)$

b) $y^2 - (xy + 3y^2 - 3x^2 + 7) + (2y^2 + 2xy + 2y^3) - (3x^2 + xy + 2y^3)$

7. Polinom $3x^2 - 5xy - 5y^2 + y$'yi aşağıdaki biçimlerde yazın:

a) İki toplam teriminden oluşan bir toplam olarak; bunlardan biri $3x^2 - 5xy$ olsun.

b) İki ifadeden oluşan bir fark olarak; eksilen ifade $3x^2 - 5xy$ olsun.

8. Bir otomobil ilk gün $(3xy^2 + 5x^2y)$ kilometre yol almıştır. İkinci gün bunun 2 katı, üçüncü gün ise ilk iki günün toplamının 3 katı kadar yol almıştır. Otomobil üç günde toplam kaç kilometre yol almıştır?

9. İki cismin t saniyede yer değiştirmesi (metre cinsinden) şöyledir:

Cisim A: $(5t^2 + 7t + 12)$ metre

Cisim B: $(3t^2 + 4t + 9)$ metre

Cisim A'nın yer değiştirmesi ile Cisim B'nin yer değiştirmesi arasındaki farkı bulun.

2.8. Tam Rasyonel İfadelerin Çarpılması

Tek Terimlerin Çarpılması

ETKİNLİK

Aşağıdaki çarpımlar eşit midir?

a) $a \cdot b$ ve $b \cdot a$ b) $(a \cdot b) \cdot c$ ve $a \cdot (b \cdot c)$,

burada a, b ve c herhangi rasyonel sayılardır. Cevabını gerekçelendiriniz.

Tek terimlerin çarpımını bulalım: $-5ab^2c$ ve $3a^3bx$.

$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = (-5 \cdot 3)(a \cdot a^3) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot c \cdot x$ Çarpmanın değişme ve birleşme yasalarına göre:

$= -15a^4b^3cx$ Her parantezde çarpma işlemini yaparız.

Tek terimler şu kurala göre çarpılır: Önce katsayılar çarpılır, ardından aynı tabana sahip ana değerlerin dereceleri toplanır.

Yalnızca bir tek terimde bulunan dereceler ise çarpıma aynen, üzerlerindeki göstergelerle birlikte geçirilir.

ÖRNEK 1

Tek terimler $4a^2b$, $0{,}5ac^3$ ve $-3b^3c^2$'nin çarpımını bulun.

$4a^2b \cdot 0{,}5ac^3 \cdot (-3b^3c^2) = [4 \cdot 0{,}5 \cdot (-3)] \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^3) \cdot (c^3 \cdot c^2) = -6a^3b^4c^5$

SORU 1

Verilen çarpmaları yapın: a) $2x^2 \cdot (-3xy^2)$ b) $4xy \cdot 5x$ c) $-6ax^2 \cdot (-3a^2x)$

SORU 2

Alanı $7x^5$ m^2 olan bir yüzeyde basınç $10x^2$ Pa'dır.

Çarparak, yüzeye etki eden kuvvetin büyüklüğünü hesaplayın.

ETKİNLİK

Üs alma işlemini yapın: a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $4^2 \cdot 4^4$ c) $(3^3)^2$

Üs alma işlemini hangi kurallara göre yaptın?

Bir tek terim üssü alınırken, her çarpan üs göstergesine göre üslendirilir, sonra elde edilen üsler çarpılır.

ÖRNEK 2

Aşağıdaki tek terimin üssünü bulun: a) $(2x^2y^3z^4)^2$ b) $(3a^2xy^3)^4$

a) $(2x^2y^3z^4)^2 = 4x^4y^6z^8$ Tek terimin üssünü alma kuralını uygularız.

b) $(3a^2xy^3)^4 = 81a^8x^4y^{12}$ Tek terimin üssünü alma kuralını uygularız.

SORU 3

Kenar uzunluğu $4a^4b^2c^5$ olan bir küpün hacmini hesaplayınız.

POLINOMUN TEK TERIMLE ÇARPILMASI

ETKİNLİK

Aşağıdaki işlemleri iki yolla hesaplayın:

a) $3(2 + 5)$ b) $(2 + 5)3$ c) $3(2 - 5)$ d) $(2 - 5)3$

Bu hesaplamaları hangi yasaya göre yaptın?

Polinom $2a^3 - 3ab^2$ ile tek terim $4a^2b$'nin çarpımını bulalım:

$$(2a^3 - 3ab^2) \cdot (4a^2b) = 2a^3 \cdot 4a^2b - 3ab^2 \cdot 4a^2b$$
$$= 8a^5b - 12a^3b^3$$

Çarpmanın dağılma (distribütif) yasasını kullanıyoruz.
Tek terimlerin belirtilen çarpma işlemini yapıyoruz.

Bir polinom, tek terimle şu şekilde çarpılır:
Önce polinomun her terimi tek terimle çarpılır, ardından elde edilen çarpımlar toplanır.

ÖRNEK 3

Polinom $-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1$ ile tek terim $-3a^2xy$'nin çarpımını bulun:

$$(-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1) \cdot (-3a^2xy) = 15a^3x^3y - 12a^2x^3y^4 + 6a^2xy^2 - 3a^2xy$$

SORU 4

Bir lambanın gücü, volt cinsinden gerilim 10t ve amper cinsinden akım $t^2 + 4$'e bağlıdır. (Güç = Gerilim · Akım) Çarparak lambanın gücünü bulun.

Polinomların Çarpılması

ETKİNLİK

Şekil 1'deki büyük dikdörtgenin alanını bulun.
Sonra, dört küçük dikdörtgenin alanlarını bulun ve elde edilen ifadeleri toplayın.

Büyük dikdörtgenin alanı, dört küçük dikdörtgenin alanlarının toplamına eşittir.

Bu eşitliği yazın. Ne sonuca vardın?



Şekil 1

Polinomların çarpımını bulalım: $2x^2 - 5xy + y^2$ ve $4x + 3y$.

Eğer ikinci polinomu M ile gösterirsek, yani $M = 4x + 3y$, o zaman yukarıdaki çarpım şu biçimi alır:
$(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot M$

Polinomun tek terimle çarpılması kuralına göre:
$(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot M = 2x^2 \cdot M - 5xy \cdot M + y^2 \cdot M$

Şimdi M yerine tekrar $4x + 3y$'yi yazarsak elde ederiz:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot (4x + 3y) &= 2x^2 \cdot (4x + 3y) - 5xy \cdot (4x + 3y) + y^2 \cdot (4x + 3y) \\ &= 2x^2 \cdot 4x + 2x^2 \cdot 3y - 5xy \cdot 4x - 5xy \cdot 3y + y^2 \cdot 4x + y^2 \cdot 3y \\ &= 8x^3 + \underline{6x^2y} - \underline{20x^2y} - \underline{\underline{15xy^2}} + \underline{\underline{4xy^2}} + 3y^3 \\ &= 8x^3 - 14x^2y - 11xy^2 + 3y^3\end{aligned}$$

İki polinom şu şekilde çarpılır: Bir polinomun her terimi, diğer polinomun her terimiyle çarpılır; sonra elde edilen çarpımlar toplanır. Son olarak, gerekirse polinom sadeleştirilir.

Polinomların çarpımında, ilk polinomun her terimi ile ikinci polinomun tüm terimlerinin çarpımlarını ya da ikinci polinomun her terimi ile ilk polinomun tüm terimlerinin çarpımlarını yazmak faydalıdır.

ÖRNEK 4

Çarpımı bulunuz: $(x + 2) \cdot (3x - y)$

$$(x + 2) \cdot (3x - y) = (x + 2) \cdot 3x + (x + 2) \cdot (-y) = 3x^2 + 6x - xy - 2y$$

$$(x + 2) \cdot (3x - y) = x \cdot (3x - y) + 2 \cdot (3x - y) = 3x^2 - xy + 6x - 2y$$

SORU 5

Çarpma işlemini yapın:

a) $(2a^3 - a^2b + 3ab^2 - 5b^3) \cdot (a^2 - 3ab + 2b^2)$

b) $(2x^3 - 5x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

SORU 6

Sabit bir kuvvet $(5t^2 + 6t + 1)$ Newton, bir cisme $(2t + 1)$ saniye süreyle etki etmektedir. Çarparak, impulsu (kuvvet · zaman) hesaplayın.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Tek terimleri çarpınız:

   a) $-5a^2b^3$ ve $-2a^3b$ b) x^3y ve $-3a^2x^6y^5$ c) $-\frac{3}{4}x^2y^3z$ ve $-\frac{4}{7}xy^2$

2. Çarpma işlemini yapın:

   a) $(8x^3 - 4x^2y - 5xy^2 + 3y^3) \cdot (-2x^2y)$ b) $(3ab^2c - 7a^2bc^2 - a^2bc) \cdot (-3abc)$

3. Polinomları çarpın:
   a) $x^2 - xy + 2y + 3x$ ve $x - 4y + 5$ b) $3a^4 - 6a^3b + 5a^2b^2 - 7ab^3 - 9b^4$ ve $a^2 - 3ab + b^2$

4. Çarpımı bulun:
   a) $(x - y) \cdot (x - 1)$ b) $(y^3 + z^3) \cdot (z - 1)$ c) $(x^2 + z^2 + 1) \cdot (x^2 - z^2 - 1)$

5. Üssü çarpım biçiminde gösteriniz, ardından çarpma işlemini yapın:
   a) $(a + b)^2$ b) $(a - b)^2$ c) $(a + b)^3$ d) $(a - b)^3$ e) $(a + b)^4$ f) $(a - b)^4$

6. İfadeyi sadeleştirin:
   a) $(3y - 2) \cdot (5 - 2y) + 6y^2$ b) $(2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) - 4x \cdot (x^2 + 1) + 4x^2$
   c) $2x \cdot (x + 6) - (2x + 1) \cdot (x + 2)$ d) $(5x - 2) \cdot (3x + 5) - (3x + 5) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2)$

7. Üsleri çarpım biçiminde gösteriniz, ardından çarpımları bulun:
   a) $(x + 1)^2$ b) $(2x - 3)^2$ c) $(x + 2)^3$ d) $(5x - 2)^3$

8. Çarpma işlemini yapın:
   a) $(xy - 3) \cdot (x^2 - 2xy + 3y) \cdot (xy + 3)$ b) $(4y^2 - 1) \cdot (2y^3 + 2y) \cdot (4y^2 + 1)$

9. Bir fizik deneyinde, öğrenci bir cisme etki eden toplam kuvveti değişken manyetik alanı içeren bir ifade ile hesaplamaktadır.
   Kuvvet, polinomların çarpımı ile verilmiştir: $(2x + 3)(x^2 - x + 4)$.
   Polinomların çarpımını yapın ve elde edilen polinomun derecesini belirleyin.

2.9. Kısaltılmış Çarpma Formülleri

Aşağıda, **kısaltılmış çarpma formülleri** olarak bilinen beş özdeşlikle tanışacağız.
Burada A ve B yalnızca sayıları değil, herhangi ifadeleri de gösterebilir.

İki İfadenin Toplamı ile Farkının Çarpımı

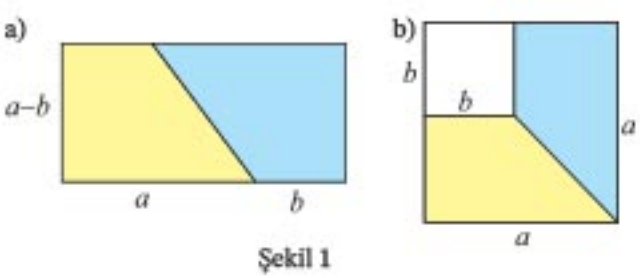
ETKİNLİK

Kenarları $a + b$ ve $a - b$ olan dikdörtgenin alanı, Şekil 1a'da gösterildiği gibi, $(a + b) \cdot (a - b)$'dir.

Şekil 2b'de, kenarı a olan kareden kenarı b olan bir kare çıkarılarak elde edilen şeklin alanı $a^2 - b^2$'dir.

Her iki alanın da eşit olduğunu görürsünüz.

Eşitliği yazınız. Ne sonuca vardınız?



Şekil 1

A ve B herhangi ifadeler olsun. $A + B$ ifadesi, A ve B ifadelerinin toplamı; $A - B$ ifadesi, A ile B ifadelerinin farkı olarak adlandırılır.

Şimdi çarpımı hesaplayalım: $(A + B) \cdot (A - B)$

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - \underline{AB} + \underline{AB} - B^2 = A^2 - B^2$ Çarpma ve indirgeme işlemlerini yaparız.

İki ifadenin toplamı ile birincisinin ikincisinden farkının çarpımı, birinci ile ikinci ifadenin karelerinin farkına eşittir:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2 \quad (1)$$

Formül (1), **iki ifadenin toplamı ile farkının çarpımı formülü** olarak adlandırılır.

ÖRNEK 1

$(4x + 3y) \cdot (4x - 3y) = (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2$ **İki ifadenin toplamı ile farkının çarpımı** formülünü uygularız.

Bu formül, iki sayının çarpımını hızlı bulmak için de kullanılabilir.

ÖRNEK 2

$58 \cdot 62 = (60 - 2) \cdot (60 + 20) = 60^2 - 2^2 = 3596$ İki ifadenin toplamı ile farkının çarpımı formülünü uygularız.

Eğer yukarıdaki formülü ters sırada yazarsak, şu formülü elde ederiz:
$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$ Bu formüle **kareler farkı formülü** denir.

İki ifadenin karelerinin farkı, bu ifadelerin toplamı ile birincisinin ikincisinden farkının çarpımına eşittir.

ÖRNEK 3

$16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x + 3y) \cdot (4x - 3y)$ İki ifadenin kareleri farkı formülünü uygularız.

Bu formül, iki sayının kareleri farkını hızlı bulmak için de kullanılabilir.

ÖRNEK 4

$237^2 - 236^2 = (237 + 236) \cdot (237 - 236) = 473 \cdot 1 = 473$ İki ifadenin kareleri farkı formülünü uygularız.

SORU 1

Bir cisim 90 km/sa hızla, diğeri ise 70 km/sa hızla hareket etmektedir.
Hızlarının kareleri arasındaki fark ne kadardır?

İki İfadenin Toplamının Karesi

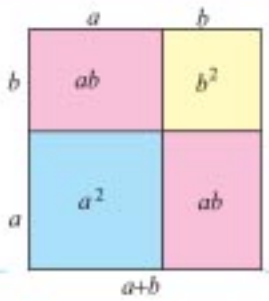
ETKİNLİK

Kenar uzunluğu $a + b$ olan karenin (şekil 2) alanı $(a + b)^2$'dir.

Diğer taraftan, karenin alanı şu alanların toplamıdır: kenarı a olan kare, kenarı b olan kare, kenarları a ve b olan iki dikdörtgen.

Eşitliği yazın.

Ne sonuca vardın?



Şekil 2

$(A + B)^2$ karesini hesaplayalım.

$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + \underline{AB} + \underline{AB} + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Çarparız ve sadeleştiririz.

İki ifadenin toplamının karesi, ifadelerin karelerinin ve onların iki kat çarpımının toplamıdır:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (2)$$

Formül (1), **iki ifadenin toplamının karesi formülü** olarak adlandırılır.

ÖRNEK 5

$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2$ Formülü, iki ifadenin toplamının karesi formülünü uygulayarak
$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$ elde ederiz:

İki ifadenin toplamının karesi formülünü, sayıların karelerini hızlı bir şekilde bulmak için kullanabiliriz.

ÖRNEK 6

$76^2 = (70 + 6)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 6 + 6^2$ Formülü, iki ifadenin toplamının karesi
$= 4900 + 840 + 36 = 5776$ formülünü uygulayarak elde ederiz:

SORU 2

Kütlesi m ve başlangıç hızı 3 m/s olan bir cismin, ek bir hız v kazandıktan sonraki enerjisi: $\frac{m}{2}(v + 3)^2$ joule'dür. Enerjiyi, iki ifadenin toplamının karesi formülünü kullanarak yazın.

Daha sonra, cismin ek hızı 5 m/s ve kütlesi 1 kg olduğunda enerjiyi hesaplayın.

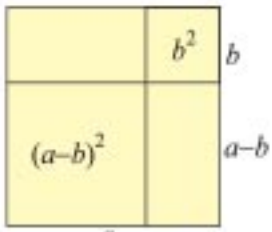
İki İfadenin Farkının Karesi

ETKİNLİK

Kenar uzunluğu $a - b$ olan karenin (şekil 3) alanı $(a - b)^2$'dir.

Diğer taraftan, bu karenin alanı şu şekilde bulunabilir: kenarı a olan karenin alanından, kenarları a ve b olan iki dikdörtgenin alanı çıkarılır, ardından kenarı b olan karenin alanı eklenir.

Eşitliği yazın. Ne sonuca vardın?



Şekil 3

$(A - B)^2$ karesini hesaplayalım.

$(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A^2 - \underline{AB} - \underline{AB} + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Çarparız ve sadeleştiririz.

İki ifadenin farkının karesi, ifadelerin karelerinin toplamından ifadelerin iki kat çarpımı çıkarılarak elde edilir:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \qquad (3)$$

Formül (1), **iki ifadenin farkının karesi formülü** olarak adlandırılır.

ÖRNEK 7

$(3a^2b - 2ab)^2 = (3a^2b)^2 - 2 \cdot 3a^2b \cdot 2ab + (2ab)^2$
$= 9a^4b^2 - 12a^3b^2 + 4a^2b^2$

İki ifadenin farkının karesi formülünü uygulayarak elde ederiz:

İki ifadenin farkının karesi formülünü, sayıların karelerini hızlı bir şekilde bulmak için de kullanabiliriz.

ÖRNEK 8

$38^2 = (40 - 2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2$
$= 1600 - 160 + 4 = 1444$

İki ifadenin farkının karesi formülünü uygulayarak elde ederiz:

SORU 3

Bir drone'un maksimum irtifası $3x^2$ metre, minimum irtifası ise $2x$ metredir. İrtifaların farkının karesini bulunuz.

İki Küpün Toplamının Çarpanlara Ayrılması

Çarpımı hesaplayalım: $(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$. Şöyle elde ederiz:

$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + \underline{A^2B} - \underline{A^2B} - \underline{\underline{AB^2}} + \underline{\underline{AB^2}} + B^3 = A^3 + B^3$

Böylece şu formüle ulaşırız: $(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$

ÖRNEK 9

$(3 + x) \cdot (9 - 3x + x^2) = 3^3 + x^3 = 27 + x^3$

Eğer yukarıdaki formülü ters sırada yazarsak şu formülü elde ederiz:

$A^3 + B^3 = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$ (4)

Bu formüle, **küplerin toplamı formülü** denir.

ÖRNEK 10

$8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3) \cdot (4x^2 - 6x + 9)$ Küplerin toplamı formülünü uygularız.

İki Küpün Farkının Çarpanlara Ayrılması

Çarpımı hesaplayalım: $(A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$. Şöyle elde ederiz:

$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 + \underline{A^2B} - \underline{A^2B} + \underline{\underline{AB^2}} - \underline{\underline{AB^2}} - B^3 = A^3 - B^3$

Böylece şu formüle ulaşırız: $(A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

ÖRNEK 11

$(m - 2) \cdot (m^2 + 2m + 4) = m^3 - 8$

Eğer yukarıdaki formülü ters sırada yazarsak şu formülü elde ederiz:

$A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$ (5)

Bu formüle, **küplerin farkı formülü** denir.

ÖRNEK 12

$8 - x^3 = 2^3 - x^3 = (2 - x) \cdot (4 + 2x + x^2)$ Küplerin farkı formülünü uygularız.

SORU 4

Belirtilen işlemleri yapın:

a) $(x - 1)^3$ b) $(x + 2)^3$ c) $(x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$ d) $(x - 1) \cdot (1 + x + x^2)$

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki kareleri ve küpleri bulun:

   a) $(x - 5)^2$ b) $(3x + 2)^2$ c) $(1 - 3a)^2$ d) $(3x - y + 5)^2$

   e) $(x + y - z)^2$ f) $(-8x^2 - 7z)^2$ g) $(2a + b)^3$ h) $(x - 3y)^2$

2. Binomun karesini bulun:

   a) $(0{,}6x - 1)^2$ b) $(1{,}3x + 0{,}1y)^2$ c) $\left(5y + \frac{1}{2}\right)^2$ d) $\left(\frac{5}{6}y + 2z\right)^2$

3. Belirtilen işlemleri yapınız ve ifadeleri sadeleştirin:
   a) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+6x+9)$ b) $(a+b+c)(a+b-c)-(a+b)^2$

4. En hızlı yolla hesaplayın:
   a) 42^2 b) 29^2 c) 75^2 d) 198^2 e) $9{,}5^2$ f) $1{,}9^2$ g) $25{,}8^2$

5. Çarpmayı en hızlı yolla yapın:
   a) $(5x+3y)\cdot(5x-3y)$ b) $(1+a)\cdot(1-a)$ c) $(2c+3b)\cdot(2c-3b)$

6. En hızlı yolla hesaplayın:
   a) $62\cdot 58$ b) $7{,}01\cdot 6{,}99$ c) 87^2-13^2 d) 73^2-27^2

7. Bir çim bahçesi, kenarı 12x metre olan kare şeklindedir. Bahçede, kenarı 5y metre olan kare şeklinde bir gölet bulunmaktadır.
   Göletin etrafındaki çimin alanını ifade eden denklemi yazın.

8. Büyük bir resim 1024^2 piksele, küçük bir resim ise 800^2 piksele sahiptir. Büyük resmin piksel sayısı ile küçük resmin piksel sayısı arasındaki fark ne kadardır?

ARAŞTIRMA

Şekil 4'te, doğal sayılardan oluşan üçgen biçimli bir bir şema verilmiştir. Bu şemaya Pascal üçgeni denir..
En sol ve en sağ kenardaki tüm sayılar birdir.
Her yeni satırda, bir önceki satırdaki en yakın iki sayının toplamı yazılır.
Örneğin:

$2=1+1, 3=1+2, 3=2+1, 4=1+3, 6=3+3, 4=3+1$ vb.



Şekil 4

Öte yandan, herhangi iki gerçek sayı a ve b için kuvvetleri şöyle yazabiliriz:

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=1\cdot a^1+1\cdot b^1$

$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=1\cdot a^2+2\cdot a^1b^1+1\cdot b^2$

$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=1\cdot a^3+3\cdot a^2b^1+3\cdot a^1b^2+1\cdot b^3$

Dikkat ediniz: terimler, a'nın en yüksek derecesinden başlayarak sıralanmıştır.

Araştırın ve terimlerin katsayıları ile Pascal üçgenindeki sayılar arasındaki ilişkiyi keşfedin.

Pascal üçgenine yeni satırlar ekleyiniz ve çarpmadan, örneğin şu kuvvetleri bulunuz:
$(a+b)^5, (a+b)^6, (a+b)^7$ vb.

2.10. Tam Sayılı Rasyonel İfadelerin Bölünmesi

Monom ile Monomun Bölünmesi

ETKİNLİK

Şu bölme işlemlerini hangi kurala göre yapabilirsiniz: a) $x^4 : x^2$ b) $a^7 : b^2$

ÖRNEK 1

Şu bölmeyi yapalım: $12a^3b^2c : (-3ab^2)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$12a^3b^2c : (-3ab^2) = \frac{12}{-3} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2} \cdot c = -4a^2c$$

Bölünenin katsayısı, bölenin katsayısına bölünür.
Bölünende yer alan tabanları aynı olan kuvvetler, bölenin kuvvetlerine bölünür.
Elde edilen sonuçlar çarpılır.

Bir monom, başka bir monoma şu şekilde bölünür. Bölünenin katsayısı, bölenin katsayısına bölünür. Bölünendeki ana terimin kuvvetleri, bölenin aynı tabana sahip kuvvetlerine bölünür. Daha sonra elde edilen sonuçlar çarpılır.
Monomun monoma bölünmesinde, bölüm her zaman monom (tam rasyonel ifade) olmayabilir.

ÖRNEK 2

Monom $6a^5$'i, monom $5a^2b$ ile bölün:

$$6a^5 : (5a^2b) = \frac{6}{5} \cdot \frac{a^5}{a^2} \cdot \frac{1}{b} = \frac{6a^3}{5b}$$

Bölüm, kesirli rasyonel bir ifade olup kesir şeklinde gösterilir.

Buna göre, eğer bölen monom, bölünende bulunmayan bir değişken ya da kuvvet içeriyorsa, veya bölünendeki üs, böleninkinden daha küçükse, o zaman bölüm kesirli-rasyonel bir ifadedir.

SORU 1

Bölümü bulun: a) $10x^3y^4z : (5xy^2)$ b) $-4x^3y^3 : (8xy^3)$ c) $9x^4yz : (12xy^3z)$ d) $b^2cxy : (3bc^2x^2)$

Polinomu Monoma Bölme

ETKİNLİK

Aşağıdaki bölümleri, bir cebirsel toplamın bir sayıya bölünmesi kuralını kullanarak hesaplayın:
a) $(7 - 5 + 6) : 2$ b) $(4^2 - 16^3 + 2^4) : 2^2$

ÖRNEK 3

Polinom $6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2$'yi monom $2a^3b$ ile bölelim.

Cebirsel toplamın bir sayıya bölünmesi kuralına göre elde ederiz:

$(6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2) : (2a^3b) = 6a^5b^3 : (2a^3b) - 5a^4b : (2a^3b) + 7{,}6a^3b^2c^2 : (2a^3b) = 3a^2b^2 - 2{,}5a + 3{,}8bc^2$

Bir **polinom, her bir terimi verilen monoma ayrı ayrı bölünerek bölünür.** Elde edilen bölümler toplanır.

ÖRNEK 4

Polinom $-12x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2$'yi monom $-3x^2$ ile bölelim:

$(-12x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2) : (-3x^2) = -12x^4 : (-3x^2) + 9x^3y : (-3x^2) - 6x^2y^2 : (-3x^2) = 4x^2 - 3xy + 2y^2$

SORU 2

Bir grup hücrenin belirli bir işlem için harcadığı toplam enerji, $16x^4y^2 + 24x^3y^3$ polinomuyla orantılıdır. Her bir hücrenin harcadığı enerji ise $8x^3y^2$ polinomuyla orantılıdır. Bir hücrenin harcadığı enerji, grubun toplam harcadığı enerjiye göre ne kadardır?

Polinomu Polinoma Bölme

ETKİNLİK

Eğer $(2x^2 - 5) \cdot (3x - 2) = 6x^3 - 4x^2 - 15x + 10$ ise, şu bölümler neye eşittir:

$(6x^3 - 4x^2 - 15x + 10) : (2x^2 - 5)$, ve $6x^3 - 4x^2 - 15x + 10 : (3x - 2)$?

Ürün olan $6x^3 - 4x^2 - 15x + 10$ ifadesinin ilk terimi nasıl elde edilmiştir?

Bir polinomu başka bir polinoma bölmek, ikinci polinomla çarpıldığında birinciyi veren üçüncü polinomu bulmak demektir.

ÖRNEK 5

$(a^2 - 4) : (a + 2) = (a - 2)$ çünkü $(a + 2) \cdot (a - 2) = (a^2 - 4)$

Polinomu polinoma bölmede, bölüm yalnızca nadir durumlarda bir polinom veya monom biçiminde ifade edilebilir. Diğer tüm durumlarda, iki polinomun bölümü kesirli-rasyonel bir ifade olarak yazılır.

ÖRNEK 6

$(a^2 + b^2) : (a + b) = \dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$ $a + b$ ile çarpıldığında $a^2 + b^2$'yi veren bir polinom yoktur.

A ve B polinomları verilsin, öyle ki $B \neq 0$ olsun.

Polinom A'nın polinom B'ye bölünmesiyle bölüm (Q) ve kalan (R) elde edilir.

Şöyle yazılır: $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ veya $A = B \cdot Q + R$.

Eğer $R = 0$ ise, polinom A, polinom B ile tam bölünebilir denir.

ÖRNEK 7

$(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) =$

Bölünen ve bölen, değişkenin derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır.

$(2x^2 + x - 3) : (2x + 3) = x - 1$

Bölünenin ilk terimi $2x^2$, bölenin ilk terimi $2x$'e bölünür ve bölümün ilk terimi x elde edilir.

$\pm 2x^2 \pm 3x$

Bölümün ilk terimi bölen ile çarpılır ve elde edilen çarpım, bölünenden çıkarılır.

$-2x - 3$

Böylece ilk kalan $-2x - 3$ bulunur.

$\mp 2x \mp 3$

İlk kalanın ilk terimi, bölenin ilk terimine bölünür ve bölümün ikinci terimi -1 elde edilir.

0

Bölümün ikinci terimi bölen ile çarpılır ve elde edilen çarpım, ilk kalan $-2x - 3$'ten çıkarılır.

Şöyle yazarız

$(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) = x - 1$

Sonuç olarak ikinci kalan sıfır elde edilir ve bölme işlemi tamamlanmış olur.

SORU 3

Polinom $x^2 - 1 + x + 2x^3$'ü, polinom $1 + x + x^2$ ile bölün.

ÖRNEK 8

Polinom $x^4 - x^2 + 2$'yi, polinom $x^2 - x + 1$ ile bölünüz.

$(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1$

$\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2$

$x^3 - 2x^2 + 2$

$\pm x^3 \mp x^2 \pm x$

$-x^2 - x + 2$

$\mp x^2 \pm x \mp 1$

$-2x + 3$

Üçüncü kalanın ilk terimi $-2x + 3$, bölenin ilk terimine bölünemez, bu nedenle bölme işlemi burada sona erer.

Şöyle yazarız $(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1 + \frac{-2x + 3}{x^2 - x + 1}$

Polinomlarda birden fazla değişken olduğunda, bölünen ve bölen terimleri, seçilen değişkenin derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır.

ÖRNEK 9

Polinom $17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4$'ü, polinom $x^2 + 2y^2 - 3xy$ ile bölün.

$(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$
$(3x^4 - 9x^3y + 17x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4) : (x^2 - 3xy + 2y^2) = 3x^2 + 11y^2$
$\pm 3x^4 \mp 9x^3y \pm 6x^2y^2$
$11x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4$
$\pm 11x^2y^2 \mp 33xy^3 \pm 22y^4$
0

Şöyle yazarız: $(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$

SORU 4

Bir mimar, bir bina için dekoratif cam paneller tasarlamaktadır. Kullanabileceği toplam cam yüzeyi $(18x^3 + 12x^2)$ metrekaredir. Her cam panelin yüzeyi ise $(6x^2 + 4x)$ metrekaredir.

a) Mimar, sahip olduğu camla kaç panel yapabilir?

b) Artan cam kalacak mı?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Monomların bölmesini yapın:
   a) $12x : (-3)$ b) $(-6a^3b^2c) : (-2a^2bc)$ c) $3x^2y^2z : (-5x^2yz)$ d) $-9ab^2 : 3ab$

2. Bölme işlemini yapın:
   a) $(12a - 15b) : 3$ b) $(4x^2y - 12x^4y^3) : (-4x^2y)$
   c) $(6a^2x^4 - 9a^3x^5 + 15a^4x^3) : ax^3$ d) $(-15a^3x^5 + 10a^4x^4 - 25a^5x^3) : (-5a^3x^3)$

3. Verilen ifadelerde belirtilen işlemleri yapın:
   a) $(a^2 - 2ab) \cdot 3a + (6ab^3 - 12a^4b^2) : 3ab$ b) $(15a^2x^3 - 6a^3x^2) : (-3a^2x^2) - 2x^2 \cdot (3 + 4a^2x)$
   c) $(x + 3y)(x - 3y) - \frac{1}{4}(2x + y)(2x - y) : \frac{y}{2}$ d) $(10a^7x^4 - a^8x^5) : (-0{,}3a^2x^2) + 10a^2 \cdot (0{,}2a^2x + 1)$

4. Polinomların bölme işlemini yapın:
   a) $(x^4 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$ b) $(3x^2 + 4x - 2) : (2x^2 - 3x + 5)$
   c) $(6a^3b - 11a^2b^2 + b^4) : (3a - b)$ d) $(3x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x^2 - 2x + 1)$

5. Kontrol ediniz: Polinom $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 3$, verilen binoma tam bölünebilir mi?
   a) $x - 2$ b) $x - 1$ c) $x + 2$ d) $x + 3$

6. Kısaltılmış çarpma formüllerini kullanarak bölme işlemini yapın:
   a) $(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$ b) $(x^2 - y^2) : (x^2 + xy + y^2)$ c) $(c^3 + 8) : (c + 2)$
   d) $(1 - 9x^2) : (1 + 3x)$ e) $(9 - 12x + 4x^2) : (3 - 2x)$ f) $(x^3 - 8) : (x - 2)$

7. Bir fizik laboratuvarı, bir cismi hareket ettirmek için kuvvet uygulayan bir makinenin yaptığı işi incelemektedir. Makinenin yaptığı toplam iş $(20x^3 + 5x^2 + 10x)$ joule'dür. Makinenin bir saniyede yaptığı iş ise $5x$ joule'dür. Makinenin toplam işi yapması için kaç saniyeye ihtiyacı vardır?

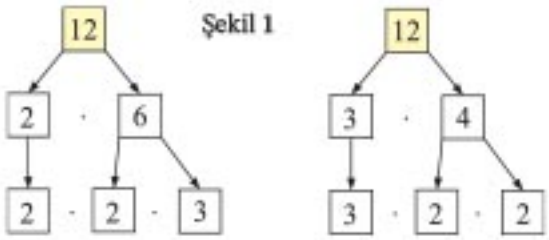
8. Bir mühendis, inşaat halindeki bir binada kablo döşemektedir. Sahip olduğu toplam kablo uzunluğu $(24x^3 + 36x^2 + 12x)$ metredir. Her daire için gereken kablo miktarı ise $(6x^2 + 9x + 3)$ metredir. Mühendis kaç daireye kablo döşeyebilir? Kaç metre kablo artar?

2.11. Polinomların Çarpanlara Ayrılma Yöntemleri

Polinomların Asal Çarpanlara Ayrılması

ETKİNLİK

Bir sayının asal çarpanların çarpımı biçiminde ifade edilmesine, **sayının asal çarpanlara ayrılması** denir.
Şekil 1'deki ağacı inceleyiniz ve sayının 12'nin asal çarpanlara ayrılışını açıklayınız.



Şekil 1

$2a + 2b = 2(a + b)$ Polinom, toplama işlemine göre çarpmanın dağılım özelliği uygulanarak, bir monom ve bir polinomun çarpımı biçiminde ifade edilir.

Bir tam rasyonel ifadenin, artık daha fazla çarpanlara ayrılamayan tam rasyonel ifadelere ayrılmasına, **polinomun asal çarpanlara ayrılması** denir.
Polinomların çarpanlara ayrılması için gerekli dönüşümlerin uygulanabileceği genel bir kural yoktur. Burada, polinomların çarpanlara ayrılmasında en çok kullanılan bazı yöntemleri göstereceğiz.

Ortak Çarpanı Parantez Dışına Çıkararak Çarpanlara Ayırma

ETKİNLİK

Çarpma işlemini yapın: a) $3(x + y)$ b) $(x + y)3$.
Çarpma işlemini yaptıktan sonra elde edilen sonuçları karşılaştırın.

Polinomların ortak çarpanı parantez dışına çıkarılarak çarpanlara ayrılması, çarpmanın dağılım özelliği yardımıyla yapılır. Böylece şu özdeşliklerden:

$m(a + b - c) = ma + mb - mc$ ve $(a + b - c)m = am + bm - cm$

sol ve sağ dağılım yasaları kullanılarak elde edilir:

$ma + mb - mc = m(a + b - c)$ ve $am + bm - cm = (a + b - c)m$

ÖRNEK 1

Polinom $10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3$'ü asal çarpanlarına ayırın.

Sayı 5, polinomdaki tüm katsayıların ortak bölenidir.

Ayrıca, polinomun tüm terimlerinde değişkenler a ve b ortak çarpan olarak vardır, fakat farklı derecelerde. Bunlar, en küçük üsleriyle parantez dışına çıkarılabilir: a^2 ve b^1.

Değişken x, üçüncü terimde bulunmadığı için ortak çarpan değildir.

Buna göre, polinomun tüm terimlerinin ortak çarpanı $5a^2b$ monomudur.

Bulunan bu monomu parantez dışına çıkarırız ve parantez içinde, verilen polinomun $5a^2b$'ye bölünmesinden elde edilen bölüm yazılır:

$10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3 = 5a^2b(2ax^2 - abx - 3b^2)$



Eğer verilen bir polinomun bütün terimleri aynı ortak çarpana sahipse, bu ortak çarpan parantezin önüne çıkarılabilir. O durumda, parantezin içinde, verilen polinomun çıkarılan ortak çarpana bölünmesiyle elde edilen polinom kalır.

ÖRNEK 2

Parantezin önüne yalnızca -1 çarpanı da çıkarılabilir.

a) $b - a = -(-b + a) = -(a - b)$ b) $1 - x = -(x - 1)$

Parantez önüne çıkarılan ortak çarpan yalnızca monom değil, aynı zamanda bir polinom da olabilir.

ÖRNEK 3

Polinom $2a(x - 3) + b(x - 3) - 5c(x - 3)$'ü asal çarpanlarına ayıralım:

$2a(x - 3) + b(x - 3) - 5c(x - 3) = (x - 3)(2a + b - 5c)$

SORU 1

Aşağıdaki polinomları asal çarpanlarına ayırın:

a) $-x^4 - x^7 - x^5$ b) $12x^2y - 18xy - 30xy^3$ c) $(y + 3)(x + 5) - (-y - 3)$

SORU 2

Bir cismin, hızının v (m/s) olduğu durumda toplam enerjisi $5v^2 + 10v$ joule ile ifade edilir.
Belirli bir hız için enerjiyi daha kolay hesaplayabilmek amacıyla, polinomu çarpanlarına ayırın.

Terimlerin Gruplanmasıyla Çarpanlara Ayırma

Polinomların çarpanlara ayrılması, terimlerin gruplanması yöntemiyle, polinom ile polinomun çarpma kuralına göre yapılır.

$(a-b)(c+d) = (a-b)c + (a-b)d = ac - bc + ad - bd.$

Eğer bir polinom çarpanlara ayrılacaksa, bu dönüşüm ters sırada yapılır:

$ac - bc + ad - bd = (a-b)c + (a-b)d = (a-b)(c+d).$

Burada, birinci ve ikinci terimi gruplayıp onlardan c'yi parantez dışına çıkardık; daha sonra üçüncü ve dördüncü terimi gruplayıp onlardan d'yi parantez dışına çıkardık.

Elde edilen ifadede $(a-b)c + (a-b)d$, ortak çarpan $a-b$'dir. Bu çarpanı parantez dışına çıkararak, çarpanlara ayırmayı elde ederiz: $(a-b)(c+d)$.

Bu çarpanlara ayırma yöntemi, **terimlerin gruplanmasıyla çarpanlara ayırma** olarak adlandırılır. Şimdi, polinom $3ax + 2b - bx - 6a$'yı asal çarpanlarına ayıralım:

$3ax + 2b - bx - 6a = (3ax - 6a) + (2b - bx) =$	Burada birinci terimi dördüncüyle, ikinci terimi üçüncüyle gruplaştırıyoruz.
$= 3a(x-2) - b(x-2) =$	Birinci gruptan ortak çarpan $3a$'yı, ikinci gruptan ise işaretle birlikte $-b$'yi çıkarıyoruz.
$= (x-2)(3a-b)$	Sonuçta ortak çarpan $x-2$ parantez dışına çıkarılır.



Verilen bir polinomun terimleri, her grubun ortak bir çarpanı olacak şekilde gruplanır. Her gruptan, uygun işaretiyle birlikte ortak çarpan parantez dışına çıkarıldığında, parantezlerin içinde aynı polinomun kalması gerekir. Daha sonra bu polinom, yeni ortak çarpan olarak parantez dışına çıkarılır.

ÖRNEK 4

Polinomu asal çarpanlarına ayırın:

a) $2xy - 2y - x + 1$ b) $ax + bx + kay + kby$

a) $2xy - 2y - x + 1 = 2y(x-1) - (x-1) = (x-1)(2y-1)$

b) $ax + bx + kay + kby = (a+b)x + (a+b)ky = (a+b)(x+ky)$

SORU 3

Bir mekanik sistemin enerjisi, $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ polinomu ile verilmiştir.
Polinomu asal çarpanlarına ayırınız, böylece sistemin farklı davrandığı değerler daha kolay incelenebilsin.

Kısaltılmış Çarpma Formüllerini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

ETKİNLİK

Aşağıdakileri en hızlı yolla hesaplayın:

a) $65^2 - 64^2$ b) $3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2$ c) $4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 + 7^2$ d) $4^3 + 5^3$ e) $2^3 - 7^3$

Hesaplamaları hangi kısaltılmış çarpma formüllerine göre yaptın?

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

Bazı polinomlar, kısaltılmış çarpma formüllerinin ters sırada yazılmış biçimleri kullanılarak çarpanlara ayrılabilir.

ÖRNEK 5

Polinomu asal çarpanlarına ayırın:

a) $x^2 - 25$ b) $9x^2 - y^2$ c) $a^2x^2 - b^2y^2$

a) $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$
$x^2 - 5^2$

b) $9x^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y)$
$(3x)^2 - y^2$

c) $a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$
$(ax)^2 - (by)^2$

ÖRNEK 6

Polinomu asal çarpanlarına ayırın:

a) $x^2 + 8x + 16$ b) $25y^2 - 10y + 1$ c) $16a^2 - 24ab + 3b^2$

a) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$

b) $25y^2 - 10y + 1 = (5y - 1)^2$
$(5y)^2 - 2 \cdot (5y) \cdot 1 + 1^2$

c) $16a^2 - 24ab + 3b^2 = (4a - 3b)^2$
$(4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2$

ÖRNEK 7

Polinomu asal çarpanlarına ayırın:

a) $8x^3 + 1$ b) $y^3 - 8$ c) $27a^3 - b^3$

a) $8y^3 + 1 = (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$
$(2y)^3 + 1^3$

b) $y^3 - 8 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$
$y^3 - 2^3$

c) $8a^3 - b^3 = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
$(2a)^3 - b^3$

SORU 4

Polinomu asal çarpanlarına ayırın:

a) $(3x + 2)^2 - 16y^2$ b) $49x^2 + 56xy + 16y^2$ c) $25a^2 - 30ab + 16b^2$
d) $a^3b^3 + 125$ e) $27y^3 - 8z^3$

Birden Fazla Yöntemin Ardışık Uygulanmasıyla Çarpanlara Ayırma

Bazı durumlarda, bir polinomu tamamen çarpanlara ayırmak için yukarıda verilen üç yöntemden birkaçını art arda uygulamak gerekir.

ÖRNEK 8

Polinomu asal çarpanlarına ayırın:
a) $24x^3y^2 - 3y^2$ b) $3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3$

a) $24x^3y^2 - 3y^2 = 3y^2(8x^3 - 1)$
$= 3y^2(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

b) $3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3 = 3x^2(y^2 - 5y + xy - 5x)$
$= 3x^2(y(y - 5) + x(y - 5))$
$= 3x^2(y - 5)(y + x)$

Önce, polinomun tüm terimlerinde ortak çarpan olup olmadığına bakılır ve varsa parantez dışına çıkarılır.
Daha sonra, parantez içinde elde edilen polinomun, terimlerin gruplanmasıyla veya kısaltılmış çarpma formüllerinden biri uygulanarak çarpanlara ayrılıp ayrılamayacağı incelenir.

ALIŞTIRMA SORULARI

Polinomu asal çarpanlarına ayırın:

1. a) $3x + 6y$ b) $2ab - 2ac$ c) $7x^5 + 21x^3$
   d) $27ab^3 - 9b^4$ e) $a^2y - ay^3$ f) $9ax - 6ay + 12az$

2. a) $2a(b-3) + 5c(b-3)$ b) $a(x+1) - b(x+1)$ c) $5(x+y) - 2(x+y)^2$
   d) $2(y-x)y^2 - x^2(y-x)$ e) $3(x-y)^2 - (x+y)(x-y)$ f) $a(x^2+1) - b(x^2+1) - c(x^2+1)$

3. a) $a^2b^2 - 4$ b) $100x^2 - 1$ c) $\frac{1}{9}a^2 - c^2$ d) $16 - a^4$

4. a) $a^3 - 8$ b) $27x^3 + 1$ c) $8m^3 - n^3$ d) $x^3y^3 - z^3$

5. a) $5ax^2 - 10ax - bx + 2b - x + 2$ b) $xyz + x^2y^2 + 3x^4y^3 + 3x^3y^4z - xy - z$
   c) $ax^3 + bx^3y + cx^2 + 3ax + 3by + 3c$ d) $12mx^2 - 9my + 15m - 8nx^2 - 6ny - 10n$

6. a) $4a^2 - b^2 - 2bc - c^2$ b) $x^2 - 3x - y^2 + 3y$ c) $xa^3 - xb^3 - ya^3 + yb^3$
   d) $9x^2 - (y^2 + z^2)^2$ e) $9(a-b)^2 - 4(a+b)^2$ f) $x^2 - y^2 - x + y$

7. İfadenin değerini en hızlı yolla hesaplayın:
   a) $3ab - 0{,}5a$, eğer $a = 25$ ve $b = 3{,}5$ b) $4x^3y - 20xy^2$, eğer $x = 2{,}4$ ve $y = 0{,}5$
   c) $327 \cdot 35 + 73 \cdot 35$ d) $285^2 - 215^2$ e) $475^2 - 25^2$

8. Bir koloni içindeki toplam bakteri sayısı, deneyin başlamasından t saat sonra $3t^2 + 6t$'dir. İfadeyi çarpanlarına ayırın ve deneyin başlamasından 15 saat sonra bakteri sayısını hesaplayın.

9. Bir mühendis, alanı $(x^2 + 5x + 6)$ metrekare olan dikdörtgen bir metal levha tasarlamaktadır. İfadeyi çarpanlarına ayırarak levhanın olası uzunluk ve genişliğini bulun.

2.12. Tam Rasyonel İfadelerin En Büyük Ortak Böleni (EBOB) ve En Küçük Ortak Katı (EKOK)

Tam Rasyonel İfadelerin En Büyük Ortak Böleni

ETKİNLİK

EBOB(18, 24)'ü bulun ve işlemi açıklayın.



İki veya daha fazla tam rasyonel ifadenin **ortak böleni**, verilen tüm rasyonel ifadeleri kalansız bölebilen tam rasyonel ifadedir.

ÖRNEK 1

a) $2ax^2$ ve a^4xy^2 Ortak bölenler: 1, a, x ve ax.

b) $ab(a-b)$ ve $b(a-b)^2$ Ortak bölenler: 1, b, $a-b$ ve $b(a-b)$.



Birden fazla tam rasyonel ifade $A_1, A_2, ..., A_n$'in, en fazla ortak çarpanı en büyük üs ile içeren ortak bölenine, bu ifadelerin **en büyük ortak böleni** denir ve EBOB$(A_1, A_2, ..., A_n)$ ile gösterilir.

ÖRNEK 2

Aşağıdakilerin en büyük ortak bölenini bulun:

a) Monomlar $14a^2b^2x$ ve $42a^2b^3xy^2$ b) Polinomlar $ab(a-b)$ ve $b(a-b)^2$

a) $14a^2b^2x$ ve $42ab^3xy^2$

EBOB $(14, 42) = 14$ Tüm katsayıların EBOB'u bulunur.

EBOB $(14a^2b^2x, 42ab^3xy^2) = 14ab^2x$ Ortak değişkenler yazılır ve her biri, monomlarda göründüğü en küçük üs ile alınır.

b) $ab(a-b)$ ve $b(a-b)^2$

EBOB $(ab(a-b), b(a-b)^2) = b(a-b)$ Tüm ortak asal çarpanlar, sahip oldukları en küçük üs ile çarpılır.

ÖRNEK 3

EBOB'u bulun. $(3x^2 + 6x + 3, 9x^2 - 9, 6x + 6)$.

$3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = \underline{3(x+1)^2}$ Polinomlar asal çarpanlarına ayrılır.

$9x^2 - 9 = 9(x^2 - 1) = \underline{9(x-1)(x+1)}$

$6x + 6 = \underline{6(x+1)}$

EBOB $(3x^2 + 6x + 3, 9x^2 - 9, 6x + 6) = 3(x + 1)$ Tüm ortak asal çarpanlar, sahip oldukları en küçük üs ile çarpılır.

ÖRNEK 4

EBOB $(x - y, 3x^2 + y) = 1$

İfadeler $x - y$ ve $3x^2 + y$, aralarında asal ifadelerdir.

SORU 1

Bir biyoloji deneyinde, iki bitkinin büyümesi besin maddesi eksikliği x'e bağlı olarak farklı oranlarda yavaşlamaktadır:

Bitki A: $\frac{20}{x^2 - 1}$

Bitki B: $\frac{15}{x^2 - 6x + 9}$.

Paydaların EBOB'unu bulun: $x^2 - 1$ ve $x^2 - 6x + 9$.

Tam Rasyonel İfadelerin En Küçük Ortak Katı

ETKİNLİK

EKOK(12, 15)'i bulun ve yöntemi açıklayın.

İki veya daha fazla tam rasyonel ifadenin **ortak katı**, verilen her ifadeye kalansız bölünebilen tam rasyonel ifadedir.

ÖRNEK 5

$4a^3b^m$ ve $6a^2x^4$ ifadelerinin ortak katları şunlardır: $12a^3bx^4$, $24a^5b^3x^6$, $60a^3bx^5$ vb.

Elbette fark etmişsinizdir ki, birkaç tam rasyonel ifadenin sonsuz sayıda ortak katı vardır.

Birden fazla tam rasyonel ifade $A_1, A_2, ..., A_n$'in, en az ortak çarpanı en küçük üslerle içeren ortak katına, bu ifadelerin **en küçük ortak katı** denir ve **EKOK**$(A_1, A_2, ..., A_n)$ ile gösterilir.

ÖRNEK 6

Aşağıdakilerin en küçük ortak katını bulun:
a) Monomlar $4a^3b$ ve $6a^2x^4$ b) Polinomlar $15x^3y^2 - 15xy^4$ ve $6x^2y + 12xy^2 + 6y^3$

a) $4a^3b$ ve $6a^2x^4$

EKOK $(4, 6) = 12$ Önce tüm katsayıların en küçük ortak katı bulunur.

EKOK $(4a^3b, 6a^2x^4) = 12a^3bx^4$ Tüm ortak ve ortak olmayan değişkenler yazılır ve her biri, monomlarda göründüğü en büyük üs ile alınır.

b) $15x^3y^2 - 15xy^4$ ve $6x^2y + 12xy^2 + 6y^3$

$15x^3y^2 - 15xy^4 = 15xy^2(x^2 - y^2) = \underline{15xy^2(x-y)(x+y)}$

$6x^2y + 12xy^2 + 6y^3 = 6y(x^2 + 2xy + y^2) = \underline{6y(x+y)^2}$

Polinomlar asal çarpanlarına ayrılır.

EKOK $(15x^3y^2 - 15xy^4, 6x^2y + 12xy^2 + 6y^3) = 30xy^2(x-y)(x+y)^2$

Tüm asal çarpanlar çarpılır ve her çarpan, göründüğü en büyük üs ile alınır.

SORU 3

Bir fizik deneyinde, iki farklı sensör, bir cismin hızını zamana (t, saniye cinsinden) bağlı olarak ölçmektedir:

Sensör A, hızı $\frac{50}{t^2 - 9}$ metre/saniye olarak ölçmektedir.

Sensör B, hızı $\frac{30}{t^2 - 4t + 3}$ metre/saniye olarak ölçmektedir.

Paydaların EKOK'unu bulunuz: $t^2 - 9$ ve $t^2 - 4t + 3$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki sayıların EBOB'unu bulun:
   a) 42 ve 18 b) 105 ve 45 c) 30 ve 75 d) 12, 32, 40 ve 56.

2. Aşağıdaki ifadelerin en büyük ortak bölenini bulun:
   a) $3ab$ ve $12ab^2$ b) $15x^3y^2$ ve $24x^2y^3$ c) $5a(a+b)^2$ ve $8a^2b(a+b)^3$
   d) $x^2 - y^2$ ve $x^3 + y^3$ e) $x^2y^2 - y^4$, $x^4 - x^2y^2$ ve $x^3y - xy^3$

3. Aşağıdaki sayıların EKOK'unu bulun:
   a) 12, 50, 45 ve 18 b) 84, 56 ve 21 c) 125, 100 ve 450 d) 96, 64 ve 180.

4. Aşağıdaki ifadelerin en küçük ortak katını bulun:
   a) $6a^2b^3$, $15ab^2$ ve $24a^3bc^2$ b) $a(x+2)$ ve $b(x+2)$ c) x ve x^2+xy^2
   d) a^2-9b^2 ve a^3+3a^2b e) x^2-x, $1-x^2$, $1+x^3$ ve x^2+x+1
   f) x^2-4y^2, $3x^2-12xy+12y^2$ ve $5y(x-2y)^3$

5. İki bakteri kolonisi, antibiyotik yoğunluğu x'e bağlı olarak farklı hızlarla çoğalmaktadır:
   Koloni A: $\frac{20}{x^2-4x+4}$, Koloni B: $\frac{15}{x^2-4}$.
   Paydaların EBOB'unu bulun: x^2-4x+4 ve x^2-4.

6. İki makine, bir depodan suyu farklı hızlarda boşaltmaktadır:
   Makine A: $\frac{40}{y^2-36}$ litre/saniye
   Makine B: $\frac{60}{y^2-12y+36}$ litre/saniye
   Paydaların EKOK'unu bulun: y^2-36 ve $y^2-12y+36$.

2.13. Cebirsel Kesir. Cebirsel Kesri Genişletme ve Sadeleştirme

Cebirsel Kesir Kavramı

ETKİNLİK

Bir restoranda x misafirin yaptığı toplam hesap $(3x+12)$ dinardır.
Her misafirin ödemesi gereken miktarı gösteren ifadeyi yazın.
Elbette yazacağınız ifade: $\frac{3x+12}{x}$ dinar olacaktır.
Yazılan bu ifade, değişkenle bölme içerdiği için rasyonel cebirsel bir ifadedir.
Dahası, hem pay hem de payda tam rasyonel ifadelerdir.



Tam rasyonel ifadelerden oluşan bir kesir (pay ve paydası tam rasyonel ifadeler olan kesir), **cebirsel kesir** olarak adlandırılır.

SORU 1

Aşağıdaki cebirsel ifadelerden hangileri cebirsel kesirdir?
a) $\frac{2a^3-1}{5}$ b) $\frac{x-3}{y+2}$ c) $\frac{x}{y-7}-3x^2$ d) $\frac{5p}{2q^2-1}$
Cevabınızı gerekçelendirin.

Cebirsel kesirler, tıpkı sıradan kesirler gibi, yalnızca paydası sıfıra eşit olmadığında anlamlıdır. Bu nedenle, bir cebirsel kesirde argümanların alabileceği değerler yalnızca, paydanın sıfırdan farklı olduğu değerlerdir.

ÖRNEK 1

Kesir $\frac{a+3}{a-4}$, $a = 4$ için anlamsızdır.

Argüman a'nın alabileceği değerler: $a \neq 4$.

ÖRNEK 2

Kesir $\frac{x^2+1}{x-y}$, $x = y$ için anlamsızdır.

Argümanlar x ve y'nin alabileceği değerler: $x \neq y$.

Cebirsel Kesri Genişletme ve Sadeleştirme

ETKİNLİK

Bir kesrin değeri değişmez, eğer hem pay hem de payda aynı sıfırdan farklı sayıyla çarpılır (ya da bölünürse). Örneğin:

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$ ve $\frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$

Peki, pay ve paydanın sıfırdan farklı aynı sayıyla çarpılması ya da bölünmesi işlemine ne ad verilir?

ÖRNEK 3

Aşağıdaki cebirsel kesir verilmiştir:

a) $\frac{a}{a+2}$, $a \neq -2$

$\frac{a}{a+2} = \frac{a(a-2)}{(a+2)(a-2)}$ — Pay ve payda, $a - 2$ tam cebirsel ifadesiyle çarpılır,, $a \neq 2$.

$= \frac{a^2-2}{a^2-4}$, $a \neq \pm 2$ — Cebirsel kesir, $a - 2$ tam cebirsel ifadesiyle genişletilmiştir,$a \neq 2$.

b) $\frac{a(b+2)^2}{3(b-1)(b+2)}$, $b \neq -2, b \neq 1$

$\frac{a(b+2)^2}{3(b-1)(b+2)} = \frac{a(b+2)^2 : (b+2)}{3(b-1)(b+2) : (b+2)}$ — Pay ve payda, $b + 2$ tam cebirsel ifadesine bölünür, $b \neq -2$.

$= \frac{a(b+2)}{3(b-1)}$, $b \neq -2, b \neq 1$ — Cebirsel kesir, $b + 2$ tam cebirsel ifadesiyle sadeleştirilmiştir,, $b \neq -2$.



Her cebirsel kesir $\frac{A}{B}$, $B \neq 0$, ve her sayı veya tam rasyonel ifade $M \neq 0$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \text{ ve } \frac{A}{B} = \frac{A : M}{B : M},\ B \neq 0,\ M \neq 0.$$

Bir cebirsel kesrin payı ve paydası aynı sayı ya da aynı tam rasyonel ifade $M \neq 0$ ile çarpıldığında, cebirsel kesrin $M \neq 0$ ile genişletildiği söylenir. Bu işleme **cebirsel kesri genişletme** denir.

ÖRNEK 4

Bir laboratuvar kabında, kütlesi $\frac{5x}{3(x-1)}$ gram olan bir çözelti vardır.
Tüm ölçümlerin standartlaştırılması için, her kaptaki miktar paydası $6x(x-1)$ olacak şekilde yazılmalıdır. Kesir hangi ifadeyle genişletilmelidir?

$$\frac{5x \cdot 2x}{3(x-1) \cdot 2x} = \frac{10x^2}{6x(x-1)}$$

$2x$ ile genişletiyoruz.

Bir cebirsel kesrin payı ve paydası aynı sayı ya da aynı tam rasyonel ifade $M \neq 0$ ile bölündüğünde, cebirsel kesrin $M \neq 0$ ile sadeleştirildiği söylenir. Bu işleme **cebirsel kesri sadeleştirme** denir.

ÖRNEK 5

Cebirsel kesirde $\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, pay ve payda ortak çarpanlara sahiptir: 6, a^2 ve b^2.
Bu kesri sadeleştirerek indirgenemez biçime getirmek için iki yol vardır.

Birinci yol:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2} = \frac{12a^2b^3c : 6}{18a^4b^2 : 6} = \frac{2a^2b^3c : a^2}{3a^4b^2 : a^2}$$
$$= \frac{2b^3c : b^2}{3a^2b^2 : b^2} = \frac{2bc}{3a^2},\ a \neq 0, b \neq 0$$

Pay ve payda, her çarpanla sırayla bölünür.

İkinci yol:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2} = \frac{12a^2b^3c : 6a^2b^2}{18a^4b^2 : 6a^2b^2}$$
$$= \frac{2bc}{3a^2},\ a \neq 0, b \neq 0$$

Pay ve payda, çarpanların çarpımı olan $6a^2b^2$ ile bölünür. Bu ifade aynı zamanda en büyük ortak bölenidir.

Cebirsel kesir $\frac{A}{B}$, eğer en büyük ortak bölen EBOB$(A, B) = K$ ise ve bu kesir tamamen sadeleştirilmişse, ya da EBOB$(A, B) = 1$ olup hiç sadeleştirilemiyorsa, bu kesre **indirgenemez kesir** denir.

ÖRNEK 6

Aşağıdaki kesirler indirgenemez mi? $\frac{2bc}{3a^2}$ ve $\frac{7xy^2}{z^2}$

$\frac{2bc}{3a^2}$ İndirgenemez kesirdir, çünkü EBOB$(2bc, 3a^2) = 1$.

$\frac{7xy^2}{z^2}$ İndirgenemez kesirdir, çünkü EBOB$(7xy^2, z^2) = 1$

ÖRNEK 7

Bir otomobil, $60x^2$ km'lik yolu $10x$ saat sürede katetmiştir. Otomobil hangi hızla hareket etmiştir?

$\frac{60x^2}{10x} = 6x$ km/saat ($10x$ ile sadeleştirilmiştir)

Otomobilin hızı $6x$ km/saat'tir.

ÖRNEK 8

Aşağıdaki kesri sadeleştirin: a) $\frac{6a^2b}{3a^2-3ab}, a \neq 0, a \neq b$ b) $\frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}, x \neq 3, x \neq 0$

a) $\frac{6a^2b}{3a^2-3ab} = \frac{6a^2b}{3a(a-b)} = \frac{2ab}{a-b}, a \neq 0, \neq b$

Eğer pay ve payda polinomlarsa, o zaman onlar asal çarpanlarına ayrılır.

b) $\frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x} = \frac{(x-3)^2}{2x(x-3)} = \frac{x-3}{2x}, x \neq 3, x \neq 0$

Daha sonra, eğer pay ve paydada ortak çarpanlar ortaya çıkarsa, bunlar sadeleştirilir.

Cebirsel Kesirleri Eş Paydada Toplama

ETKİNLİK

Kesirler $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ farklı paydalara sahiptir.

Bu kesirlerin eş paydada nasıl yazıldığını açıklayınız:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ ve $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$.

Genişletme yoluyla, paydaları farklı olan iki veya birkaç cebirsel kesir, eş paydalı cebirsel kesirlere dönüştürülebilir. Bu işleme **eş paydada toplama işlemi** denir.

Birden fazla cebirsel kesir için ortak payda olarak genellikle ya tüm paydaların çarpımı alınır, ya da paydaların en küçük ortak katı seçilir.

ÖRNEK 9

Kesirleri en küçük ortak paydada toplayın: $\frac{a}{2x^2y}$, $\frac{b}{3y}$ ve $\frac{c}{4xy}$.

OKEK $(2x^2y, 3y, 4xy) = 12x^2y$

Cebirsel kesirlerin paydalarının OKEK'ini buluyoruz.

$12x^2y : (2x^2y) = 6$

$12x^2y : (3y) = 4x^2$

$12x^2y : (4xy) = 3x$

Bulunan OKEK, her cebirsel kesirin paydasına bölünür, böylece her kesirin paydasının genişletilmesi için gereken ifade elde edilir.

$\frac{a}{2x^2y} = \frac{a \cdot 6}{2x^2y \cdot 6} = \frac{6a}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

$\frac{b}{3y} = \frac{b \cdot 4x^2}{3y \cdot 4x^2} = \frac{4bx^2}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

$\frac{c}{4xy} = \frac{c \cdot 3x}{4xy \cdot 3x} = \frac{3cx}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

Her cebirsel kesirin payını ve paydasını uygun ifade ile çarparız.

Elde edilen cebirsel kesirler en küçük ortak paydaya sahiptir.

ÖRNEK 10

Kesirleri eşit bir paydada toplayın. $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ ve $\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy}$.

$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$

$\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy} = \frac{6x^2y}{3xy(x+2)} = \frac{2x}{x+2}$

Önce cebirsel kesirleri sadeleştiriyoruz.

$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{x+3}{x-3} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$

$\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy} = \frac{2x}{x+2} = \frac{2x(x-3)}{(x+2)(x-3)}, x \neq 3, x \neq -2$

OKEK $(x-3, x+2) = (x-3) \cdot (x+2)$

SORU 1

Kesirleri eşit bir paydada toplayın.

a) $\frac{1}{a}$ ve $\frac{2}{a+1}$ b) $\frac{2}{3x^2y^3}$ ve $\frac{1}{5xy}$ c) $\frac{5}{2x-1}$ ve $\frac{x}{4x^2-2x}$

SORU 2

Bir şişede $\frac{5}{x-5}$ litre meyve suyu, diğerinde ise $\frac{3}{y+4}$ litre meyve suyu vardır. İki meyve suyu miktarını eşit bir paydada ifade edin.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Hangi x değerleri için kesir anlamsızdır?

a) $\frac{x+2}{x}$ b) $\frac{x-3}{x-1}$ c) $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$ d) $\frac{1}{x^2-4}$

2. Üslü sayılar kurallarını kullanarak kesiri sadeleştirin:

a) $\frac{x^8y^3z}{x^3y^9z^4}$ b) $\frac{(x-4y)(x-3y)^2}{6x^2(x-4y)^7(x-3y)^5}$ c) $\frac{(x-y)^2(x+1)^9}{(x-y)(x+2)^3(x+1)^{12}}$

3. Kesiri sadeleştirin:

a) $\frac{6ax}{8a^2}$ b) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ c) $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1}$ d) $\frac{3x^{n+2}}{x^ny}$

4. Kesiri sadeleştirin:

a) $\frac{3a+6}{a^3+8}$ b) $\frac{2a(x-3y)}{6a^2(3y-x)}$ c) $\frac{x^2-y^2}{ax+ay}$ d) $\frac{3a+1}{9a^2-1}$

5. Kesiri sadeleştirin ve değerini hesaplayın:

a) $\frac{a-1}{2a-2a^2}$, eğer $a=-3$ b) $\frac{x^2-4}{x+2}$, eğer $x=3{,}5$ c) $\frac{x-1}{1-x}$, eğer $x=a$

6. Cebirsel kesirleri en küçük ortak paydada toplayın:

a) $\frac{a}{2b}$ ve $\frac{b}{c^2}$ b) $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{y}$ ve $\frac{c}{z}$ c) $\frac{a^2}{2b^2}$, $\frac{2bc}{a^2}$ ve $\frac{ab}{4c^2}$

7. Cebirsel kesirleri eşit bir paydada toplayın:

a) $\frac{2}{3a^2b^3}$, $\frac{5a}{6b^3c^2}$ ve $\frac{1}{5abc}$ b) $\frac{x}{x+y}$ ve $\frac{y}{x-y}$ c) $\frac{a}{x+y}$ ve $\frac{b}{(x+y)^2}$

d) $\frac{2x}{x+y}$, $\frac{2y}{x-y}$ ve $\frac{xy}{x^2-y^2}$ e) $\frac{2a}{a^3-ax^2}$, $\frac{3x}{x+a}$ ve $\frac{5a}{x^2+2ax+a^2}$ f) $\frac{5}{2x-1}$ ve $\frac{x}{4x^2-2x}$

8. Bir fabrikada $36x^2y^3$ otomobil parçası vardır ve bunlar her kutuya $6xy$ parça konularak paketlenecektir. Kaç kutu paketlenecektir?

9. Laboratuvarda küçük bir şişede $\frac{8}{5-x}$ ml çözelti vardır. Eğer miktar $10x(5-x)$ paydası ile ifade edilmesi gerekiyorsa, cebirsel kesir hangi ifade ile genişletilmelidir?

2.14. Cebirsel Kesirlerle İşlemler

Cebirsel Kesirlerin Toplanması ve Çıkarılması

ETKİNLİK

Hesaplayın:

a) $\frac{8}{15}+\frac{4}{15}$ ve $\frac{8}{15}-\frac{4}{15}$ b) $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$ ve $\frac{4}{7}-\frac{2}{5}$

Kurallara göre toplama ve çıkarma işlemlerini nasıl yaptığını açıklayın.

Cebirsel kesirlerin toplanması ve çıkarılmasının kuralları, basit kesirlerin toplanması ve çıkarılmasının kuralları ile aynıdır.

ÖRNEK 1

Cebirsel kesirlerin toplamını bulun: $\frac{3x}{2y^2}$ ve $\frac{5}{2y^2}$.

$\frac{3x}{2y^2} + \frac{5}{2y^2} = \frac{3x+5}{2y^2}, y \neq 0$

Cebirsel kesirlerin paydaları eşittir.

Toplamın payı, cebirsel kesirlerin paylarının toplamıdır.

Toplamın paydası, cebirsel kesirlerin paydasına eşittir.

Cebirsel kesirler eşit paydalara sahip olduklarında, toplama işlemi payların toplanmasıyla yapılır, sonra elde edilen toplam ortak paydaya bölünür:

$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, C \neq 0.$

ÖRNEK 2

Cebirsel kesirlerin toplamını bulunuz. $\frac{2a}{x-1}, \frac{3a-1}{x-1}$ ve $\frac{2-ab}{x-1}$.

$\frac{2a}{x-1} + \frac{3a-1}{x-1} + \frac{2-ab}{x-1} = \frac{2a+3a-1+2-ab}{x-1} = \frac{5a+1-ab}{x-1}, x \neq 1$

SORU 1

Toplamı bulun. $\frac{3a}{2a^2x} + \frac{5ab}{2a^2x} + \frac{a-2b}{2a^2x}$.

ÖRNEK 3

Cebirsel kesir $\frac{a}{c}$ ile cebirsel kesir $\frac{a+3}{c}$ arasındaki farkı bulun.

$\frac{a}{c} - \frac{a+3}{c} = \frac{a-(a+3)}{c}$

$= \frac{a-a-3}{c} = \frac{-3}{c}, c \neq 0$

Cebirsel kesirlerin paydaları eşittir.

Farkın payı, kesirlerin paylarının farkıdır; çıkarılan kesirin payı, çıkılan kesirin payından çıkarılır.

Farkın paydası, kesirlerin paydasına eşittir.

Cebirsel kesirler eşit paydalara sahip olduklarında çıkarma işlemi şu şekilde yapılır:
Çıkan kesirin payından, çıkarılan kesirin payı çıkarılır, sonra elde edilen fark ortak paydaya bölünür:

$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}, C \neq 0$

ÖRNEK 4

Farkı bulun. $\frac{6a-1}{a+1} - \frac{2a-b}{a+1}$.

$\frac{6a-1}{a+1} - \frac{2a-b}{a+1} = \frac{6a-1-(2a-b)}{a+1} = \frac{6a-1-2a+b}{a+1} = \frac{4a+b-1}{a+1}, a \neq -1$

SORU 2

Farkı bulun: $\frac{2a-3b}{a^2b} - \frac{4a-5}{a^2b}$.

Eğer cebirsel kesirlerin paydaları farklı ise, o zaman öncelikle eşit bir paydada ifade edilmeleri gerekir, ardından eşit paydalı kesirler gibi toplanır veya çıkarılırlar.:

$$\frac{A}{M} \pm \frac{B}{N} = \frac{A \cdot N}{M \cdot N} \pm \frac{B \cdot M}{M \cdot N}, M, N \neq 0$$

ÖRNEK 5

Belirtilen işlemleri gerçekleştirin:

a) $\frac{5b}{2a^2} + \frac{3}{4ab} + \frac{2b}{a}$ b) $\frac{2}{c-x} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x}$ c) $a + \frac{ax}{a-x}$ d) $\frac{b^2}{2a+b} + 2a - b$

a) $\frac{5b}{2a^2} + \frac{3}{4ab} + \frac{2b}{a} = \frac{5b \cdot 2b + 3 \cdot a + 2b \cdot 4ab}{4a^2b} = \frac{10b^2 + 3a + 8ab^2}{4a^2b}, a \neq 0, b \neq 0$

b) $\frac{2}{c-x} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x-c} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x} = \frac{-2x + 3x - (x-c)}{x(x-c)} = \frac{c}{x(x-c)}, x \neq 0, x \neq c$

c) $a + \frac{ax}{a-x} = \frac{a}{1} + \frac{ax}{a-x} = \frac{a(a-x) + ax}{a-x} = \frac{a^2}{a-x}, a \neq x$

d) $\frac{b^2}{2a+b} + 2a - b = \frac{b^2}{2a+b} + \frac{2a-b}{1} = \frac{b^2 + (2a-b)(2a+b)}{2a+b} = \frac{4a^2}{2a+b}, b \neq -2a$

SORU 3

Bir elektrikçi iki parça tel kesmiştir. Birinin uzunluğu $\frac{3}{7xy^2}$ metre, diğerinin uzunluğu ise $\frac{5}{2x^2y}$ metredir. Elektrikçi toplamda ne kadar tel kesmiştir? Cevabı cebirsel kesir biçiminde yazın.

Cebirsel Kesirlerin Çarpılması ve Bölünmesi

ETKİNLİK

Hesaplayın: a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ c) $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$

Yapılan işlemleri hangi kurallara göre gerçekleştirdiğini açıklayın.

Cebirsel kesirlerin çarpılması, üslü hale getirilmesi ve bölünmesi için geçerli olan kurallar, basit kesirler için geçerli olan kurallarla aynıdır.

ÖRNEK 6

Cebirsel kesirlerin çarpımını bulun: $\frac{9x}{2y^2}$ ve $\frac{3x}{z}$.

$$\frac{9x}{2y^2} \cdot \frac{y}{3x^2} = \frac{9x \cdot y}{2x^2 \cdot 3y^2} = \frac{3xy}{2x^2y^2} = \frac{3}{2xy}$$

Pay, cebirsel kesirlerin paylarının çarpımıdır.

Payda, cebirsel kesirlerin paydalarının çarpımıdır.

Cebirsel kesirler, payları ve paydaları ayrı ayrı çarpılarak çarpılır. Böylece payların çarpımı çarpımın payı, paydaların çarpımı ise çarpımın paydası olur:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, B \neq 0, D \neq 0.$$

ÖRNEK 7

Cebirsel kesirleri çarpın. $\frac{5a^2x}{3by^3}$ ve $-\frac{9b^2y}{10ax^2}$.

$$\frac{5a^2x}{3by^3} \cdot \left(-\frac{9b^2y}{10ax^2}\right) = -\frac{5a^2x \cdot 9b^2y}{3by^3 \cdot 10ax^2} = -\frac{3ab}{2xy^2}, abxy \neq 0$$

ÖRNEK 8

Bir dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları $\frac{5}{x^2-4}$ cm ve $\frac{x-2}{x+2}$ cm'dir. Üçgenin alanı P kaçtır?

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{5(x-2)}{2(x^2-4)(x+2)} = \frac{5}{2(x+2)^2} \text{ cm}^2$$

Üçgenin alanı şöyledir: $\frac{5}{2(x+2)^2}$ cm².

Cebirsel kesirlerin çarpılmasında sadeleştirme yapılıp yapılamayacağına bakılmalıdır.
Bunun için, paylar ve paydalar (eğer polinomlarsa) çarpanlarına ayrılır ve sadeleştirme, payların ve paydaların çarpımından önce yapılır. Bu durum yukarıda gösterilmiştir.

SORU 4

Cebirsel kesirlerin çarpımını bulun. $\frac{x-1}{2y}$ ve $\frac{4y^2}{1-2x+x^2}$.

Bir cebirsel kesir üslü hale getirilirken, payı ve paydası aynı üs göstergesi ile ayrı ayrı üslü yapılır:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, B \neq 0, n \in \mathbb{Z}.$$

ÖRNEK 9

Üslü hale getirmeyi yapın. $\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3$.

$$\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3 = \frac{(2a^2x)^3}{(3b)^3} = \frac{8a^6x^3}{27b^3}, b \neq 0$$

SORU 5

Cebirsel kesir $\frac{bc}{a^2+a}$'nın dördüncü kuvvetini bulun.

Cebirsel kesirler şu şekilde bölünür: Bölünen kesir, bölen kesirin karşılıklı (ters) değeri ile çarpılır:
$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0.$

ÖRNEK 10

Bölümü bulun: a) $-\frac{28a}{5b^3} : \frac{14a^2}{15b^4}$ b) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2} : (a-b+1)$

a) $-\frac{28a}{5b^3} : \frac{14a^2}{15b^4} = -\frac{28a}{5b^3} \cdot \frac{15b^4}{14a^2} = -\frac{28a \cdot 15b^4}{5b^3 \cdot 14a^2} = -\frac{6b}{a}, a \neq 0, b \neq 0$

b) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2} : (a-b+1) = \frac{(a+1)^2-b^2}{3x^2} : \frac{a-b+1}{1} = \frac{(a+1-b)(a+1+b)}{3x^2} \cdot \frac{1}{a-b+1}$
$= \frac{a+b+1}{3x^2}, a-b+1 \neq 0, x \neq 0$

SORU 6

Cebirsel kesir $\frac{x}{x^2-16}$ 'yı cebirsel kesir $\frac{x^3+4x^2}{x-4}$ ile bölün.

ÖRNEK 11

Dikdörtgen biçimindeki bir parselin alanı $\frac{12}{x}$ metrekaredir. Eğer genişliği $\frac{3}{y}$ metre ise, parselin uzunluğu kaç metredir?

$\frac{12}{x} : \frac{3}{y} = \frac{12}{x} \cdot \frac{y}{3} = \frac{4y}{x}$ metre Parselin uzunluğu $\frac{4y}{x}$ metredir.

ALIŞTIRMA SORULARI

Cebirsel kesirlerle belirtilen işlemleri yapın:

1. a) $\frac{a+2}{b} + \frac{2a-5}{b}$ b) $\frac{2a+1}{a} + \frac{3x-1}{a} - \frac{x-2}{a}$ c) $\frac{2x+1}{(y-2)^2} + \frac{3x-1}{(y-2)^2} - \frac{x-2}{(y-2)^2}$
2. a) $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{2x+1}$ b) $\frac{1}{x^2-4x+4} + \frac{5}{x^2-4}$ c) $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$
3. a) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{5}{2a+4} - \frac{4}{a^2-4} + \frac{1}{a-2}$ c) $\frac{xy-1}{xy+1} - \frac{xy+1}{1-xy} + \frac{4}{1-x^2y^2}$
4. a) $\frac{3}{x-c} + \frac{2}{c-x} - \frac{1}{x}$ b) $\frac{3a+1}{2a+6} - \frac{a-1}{a+3}$ c) $\frac{1}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2+6x+9}$
5. a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{2a}{a-b}$ b) $\frac{x+1}{y} \cdot \frac{4y^2}{x^2-1}$ c) $\frac{x-2}{6x+2y-2z} \cdot \frac{3x+y-z}{2x-x^2}$
6. a) $\frac{x-1}{2y} : \frac{(1-x)^2}{4y^2}$ b) $\frac{x^2}{(a-2)} : \frac{x^2}{(2-a)^2}$ c) $\frac{x^2-xy}{a^2+a} : \frac{2x-2y}{3a+3}$
7. Dörtgenin kenarları verilen çevresini bulun. $\frac{2}{x-5}$, $\frac{6x}{x+3}$, $\frac{1}{7x-2}$ ve $\frac{x^2}{x^2+3}$.

8. Yüksekliği $\frac{x-2}{x^2+4}$ ve tabanları $\frac{2}{x^2+5}$, $\frac{x^2}{x+3}$ olan bir yamuğun alanını bulun.

9. Eğer günlük ihtiyaç $\frac{x^2}{x^2+3}$ protein ise ve sen $\frac{x^2}{x^2+1}$ protein alıyorsan, günlük ihtiyacın ne kadarını karşılıyorsun?

TEKRAR VE PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. İfadenin değerini hesaplayın ve hesap makinesi ile kontrol edin:
   a) $a^2+2\sqrt[3]{a}-4^2+a-\sqrt{a}$ eğer $a=64$ b) $x^2-\sqrt[3]{x^2}+5x\sqrt{x}-7$ eğer $x=81$

2. Hesap makinesi kullanmadan hesaplayın:
   a) $\left(\frac{1}{7}\right)^0+\left(\frac{1}{13}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ b) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^{-2}$
   c) $9^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{5}{6}}+125^{\frac{2}{3}}$
   Çözümü kesir biçiminde yazın.

3. Tam sayı üs göstergeli kuvvetlerle belirtilen işlemleri yapın:
   a) $\frac{3^{-1}xy^{-2}}{2^{-2}(x^2+y^2)^{-1}}$ b) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{a^{-3}\cdot a^7}{a^{-5}}:\frac{a^{-2}}{a^0}\right)^{-4}$

4. Rasyonel üs göstergeli kuvvetlerle belirtilen işlemleri yapın:
   a) $a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{4}}:ab^{-\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{-12}$ c) $\frac{2a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^7}{a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}$

5. Bir uçak Avrupa'dan Avustralya'ya uçmuştur. Havalimanları birbirinden $9{,}39\cdot10^3$ km uzaklıktadır. Uçuş $7{,}26\cdot10^3$ dakika sürmüştür.
   Ortalama hız = toplam mesafe : gerekli süre
   Uçağın ortalama hızı dakikada kilometre cinsinden kaçtır?

6. Satürn'ün Güneş etrafındaki yörüngesi dairesel değildir, fakat ondan maksimum ve minimum uzaklığı vardır. Satürn'ün Güneş'e en yakın uzaklığı $4{,}6\cdot10^7$ km, en uzak uzaklığı ise $6{,}98\cdot10^7$ km'dir.
   Bu iki uzaklık arasındaki fark kilometre cinsinden ne kadardır? Çözümü standart biçimde yazın.

7. Verilen ifadede değişkenlerin alabileceği geçerli değerler kümesini bulun:
   a) $\frac{x+5x+3}{x^2+1}$ b) $\frac{a^2-16}{(a+4)\cdot(a-4)}$ c) $\frac{2a-2b}{2}$

8. Polinomları sadeleştirin.
   a) $7a^3-8{,}2b+0{,}5b-0{,}3a^3-a^3b^3$ b) $7xyz-4x^2z^2-7xz^2+6xz^2-xyz+4x^2z^2$

9. Parantezlerden kurtulunuz ve ifadeyi sadeleştirin:
   a) $(2x-y+x)-(x+y-5z)$ b) $a^2-2ab-b^2-[4a^2+6ab-(-2ab+7b^2)]$
   c) $-[(a-5b^2+c^3)-7(a+b^2-5c^3)]$ d) $7x^2y-(5x^2y-9xyz-3x^2z)-2x^2y-[8xyz-(6xyz-4x^2z)]$

10. Bir inşaat şirketi, iki proje için toplam malzeme giderini polinomlar kullanarak hesaplamaktadır. İlk projenin maliyeti $4x^2 + 3x + 5$ avrodur. İkinci projenin maliyeti $2x^2 - x + 7$ avrodur. Burada x, çalışma günlerinin sayısını göstermektedir.

a) İki projenin toplam maliyetini bulun.

b) İki proje arasındaki maliyet farkını bulun.

11. Belirtilen işlemleri yapın ve ifadeleri sadeleştirin:

a) $4x^2y^3 - 6x + 5) \cdot (-4x)$ b) $(x^2 - 6x + 5) \cdot (-4x)$

c) $(3x + 4y) \cdot (x^2 + 5y^2)$ d) $(5x - 3y) \cdot (4x + 7) - (2x - y) \cdot (3x + 8y)$

e) $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$ f) $(2x^3 - 4x^2 + 5) : (x^2 + 6)$

12. Bir peyzaj tasarımcısı, uzunluğu $x^2 + 5x + 6$ metre ve genişliği $x + 2$ metre olan dikdörtgen bir bahçeyi düzenlemektedir. Bahçenin alanı için polinomu bulun.

13. Belirtilen işlemleri yapın ve ifadeleri sadeleştirin:

a) $(x + y)^2 - (x - y)^2 + (x - y) \cdot (x + y)$ b) $(c + 1)^2 + 3(c - 1)^2 - 5(c + 1) \cdot (c - 1)$

14. En hızlı şekilde hesaplayın:

a) 401^2 b) 1002^2 c) 99^2 d) $57 \cdot 63$ e) $72^2 - 68^2$ f) $1{,}01 \cdot 0{,}99$

15. Bir meyve bahçesinde her sırada b meyve ağacı olmak üzere a sıra vardır. Diğer bir bahçede ise ilkine göre 15 sıra daha fazla, fakat her sırada 3 ağaç daha az vardır. İkinci bahçede, birincisinden kaç ağaç daha fazladır? $a = 30$ ve $b = 38$ için ağaç sayısını hesaplayın.

16. İfadeyi asal çarpanlarına ayırın:

a) $12ax - 6bx + 2ay - by$ b) $x^4 - 10x^2y + 25y^2$ c) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

d) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$ e) $x^3 - 3x^2 + x + ax^2 - 3ax + a$ f) $x^3 + y^3 + (x + y)^2 + x^2 - y^2$

17. Polinomların OKEK'ini bulun:

a) $x^2y + xy^2$ ve $x^2 - y^2$ b) $5x - 5$, $3x + 3$ ve $2x^2 - 2$ c) $x^3 - 2x^2y$ ve $x^2 - 4xy + 4y^2$

18. Polinomların EBOB'unu bulun: a) $6x^2y^4$ ve $9x^5y$ b) $x^2 + 4x + 4$ ve $x^2 - 4$ c) $a^3 + 8$, $a^2 - 4$ ve $a^2 + 2a$

19. İfadenin değerini hesaplayın:

a) $\dfrac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{ab}$, eğer $ab = 2$ b) $\dfrac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b}$, eğer $ab = 5$

20. Belirtilen işlemleri yapın:

a) $\dfrac{(x+1)^2}{x} - \dfrac{(x-1)^2}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-c} - \dfrac{1}{x+c} + \dfrac{1-2c}{x^2-c^2}$ c) $\dfrac{x^2-25}{x^2-9} \cdot \dfrac{x^2-3x}{x^2+3x}$

21. İfadeyi sadeleştirin:

a) $\dfrac{x}{2x^3 - 2x^2y} + \dfrac{4y}{x^2y + xy^2} - \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ b) $\dfrac{2x^2 + 8xy + 8y^2}{xy + y} \cdot \dfrac{(x+1)}{3x^2 - 12y^2}$

c) $\dfrac{x^2 - y^2 + 2x + 1}{x(x - y + 1)} : (x - y + 1)$ d) $\left(\dfrac{x^2+1}{2x} - 1\right) : \left(\dfrac{x^2+1}{2x} + 1\right)$

22. Bir mühendis, kiriş boyunca dağıtılmış iki farklı yüke dayanacak bir kiriş tasarlamaktadır. Toplam yükün dağılımı şu şekilde verilmiştir:

$$\frac{3x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3x}$$

İfadeyi sadeleştiriniz ve sadeleştirilmiş ifadenin neden mühendislik hesaplamalarında yardımcı olduğunu açıklayın.

Konu 3:

FONKSİYON, DENKLEM, İKİ DENKLEMDEN OLUŞAN SİSTEM VE EŞİTSİZLİK

Bu konuyu işlerken şu becerilere sahip olacaksın:

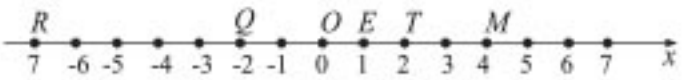
1. Köşeleri koordinatlarla verilen çokgenlerin çevresini ve alanını hesaplamak.
2. Problem durumlarında doğrusal bağımlılığı tanımak, onu fonksiyon olarak ifade etmek, grafiğini çizmek, analiz etmek ve sonuçlar çıkarmak.
3. Bir denkleme, iki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemine ve eşitsizliğe indirgenen problem durumlarını çözmek.

3.1. Noktanın Koordinatları ve Kartezyen Dik Koordinat Sisteminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Noktanın Koordinatları

ETKİNLİK

a) Şekil 1'de sayı doğrusu üzerinde işaretlenmiş M, T, E, O, Q ve R noktalarının koordinatlarını yazın.



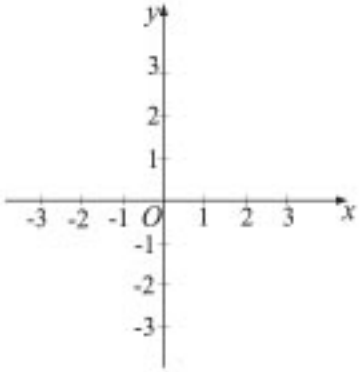
Şekil 1

Bir sayı doğrusu çiziniz ve $A(+2)$ ile $B(-2)$ noktalarını işaretleyin.

$A(+2)$ ve $B(-2)$ noktalarının koordinat başlangıcı O'dan olan uzaklıkları kaçtır?

Kartezyen dik koordinat sistemi

Birbirine dik iki sayı doğrusundan oluşur ve bu doğrulara koordinat eksenleri denir (Şekil 2).

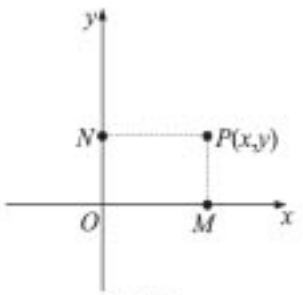


Şekil 2

Yatay koordinat eksenine ***x*-ekseni** veya **apsis ekseni** denir.
Dikey koordinat eksenine ***y*-ekseni** veya **ordinat ekseni** denir.
İki koordinat ekseninin kesiştiği noktaya **koordinat başlangıcı** denir ve O harfi ile gösterilir.

Apsis ekseninin pozitif yönü, koordinat başlangıcının sağ tarafında yer alan yön olarak alınır.
Ordinat ekseninin pozitif yönü, koordinat başlangıcının yukarısında yer alan yön olarak alınır.
Koordinat sisteminin tanımlandığı düzleme **koordinat düzlemi** denir.

Şekil 3'te R noktası koordinat düzlemindedir.
M noktası, R noktasından x-ekseni üzerine indirilen dikmenin ayağıdır.
N noktası, R noktasından y-ekseni üzerine indirilen dikmenin ayağıdır.
M noktasına x-ekseni üzerinde bir tek gerçek sayı x karşılık gelir.
N noktasına y-ekseni üzerinde bir tek gerçek sayı y karşılık gelir.
R noktasının konumu, (x, y) biçimindeki sıralı gerçek sayı çifti ile tam olarak belirlenir; buna R noktasının koordinatları denir.
x sayısı, R noktasının birinci koordinatı veya **apsisi** olarak adlandırılır.
y sayısı, R noktasının ikinci koordinatı veya **ordinatı** olarak adlandırılır.
Şu şekilde gösterilir: $P(x, y)$.



Şekil 3

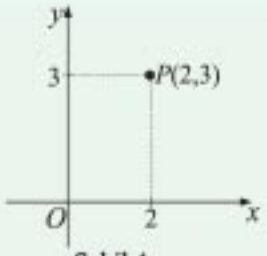
ÖRNEK 1

Koordinat düzleminde $P(2, 3)$ noktasını çizin.

Koordinatı 2 olan noktadan geçen, x-ekseni üzerine dikme çizin.

Koordinatı 3 olan noktadan geçen, y-ekseni üzerine dikme çizin.

Bu iki dikmenin kesişme noktası P noktasıdır (Şekil 4).



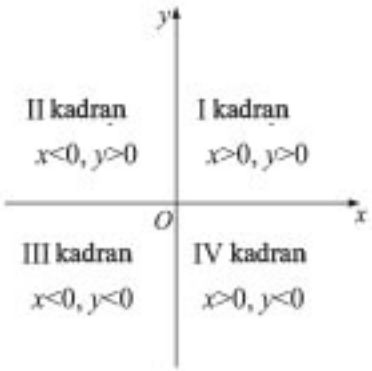
Şekil 4

Koordinat eksenleri, koordinat düzlemini dört bölgeye ayırır; bu bölgelere **bölge (kadran)** denir (Şekil 5).

I. kadran, sağ üst kısımdır.
II. kadran, sol üst kısımdır.
III. kadran, sol alt kısımdır.
IV. kadran, sağ alt kısımdır.

Bir $P(x, y)$ noktası şu durumlarda belirtilen kadranda bulunur:

I. kadran, eğer $x > 0$ ve $y > 0$ ise.
II. kadran, eğer $x < 0$ ve $y > 0$ ise.
III. kadran, eğer $x < 0$ ve $y < 0$ ise.
IV. kadran, eğer $x > 0$ ve $y < 0$ ise.



Şekil 5

ÖRNEK 2

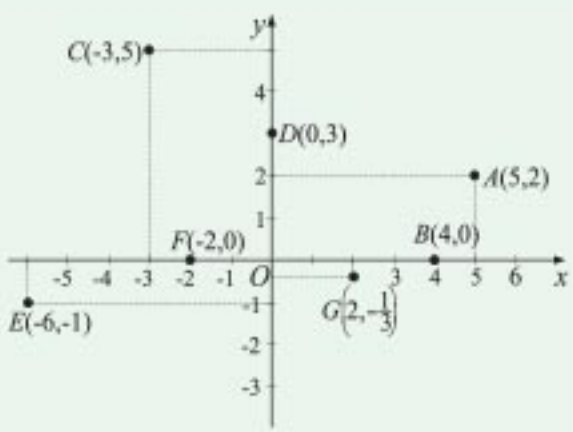
Koordinat düzleminde noktayı çiz:

a) $A(5, 2)$ b) $B(4, 0)$ c) $C(-3, 5)$ ç) $D(0, 3)$
d) $E(-6, -1)$ e) $F(-2, 0)$ f) $G\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ g) $H(0, -4)$

ve hangi kadranda veya hangi eksen üzerinde bulunduğunu belirle.

a) $A(5, 2)$ birinci kadranda bulunur.
b) $B(4, 0)$ x-ekseni üzerinde bulunur.
c) $C(-3, 5)$ ikinci kadranda bulunur.
ç) $D(0, 3)$ y-ekseni üzerinde bulunur.
d) $E(-6, -1)$ üçüncü kadranda bulunur.
e) $F(-2, 0)$ x-ekseni üzerinde bulunur.
f) $G\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ dördüncü kadranda bulunur.
g) $H(0, -4)$ y-ekseni üzerinde bulunur.

Noktalar Şekil 6'da gösterilmiştir.



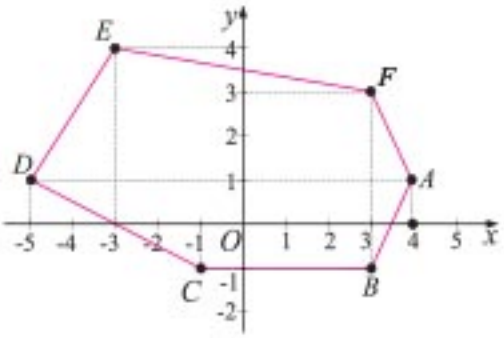
Şekil 6

SORU 1

Altıgen *ABCDEF*'in köşelerinin koordinatlarını yaz (Şekil 7).

SORU 2

Koordinat düzleminde şu noktaları çiz:
$A(-4, 3)$, $B(2, 3)$ ve $C(2, -3)$.
Daha sonra, *ABCD* bir kare olacak şekilde *D* noktasını çiz.
D noktasının koordinatlarını yaz.



Şekil 7

İki Nokta Arasındaki Uzaklık

ETKİNLİK

Sayı doğrusu üzerindeki noktalar arasındaki uzaklığı hesapla:
a) $A(+2)$ ve $B(+4)$ b) $M(-4)$ ve $N(+7)$ c) $P(-3)$ ve $Q(-5)$ d) $S(-6)$ ve $T(+4)$
Daha sonra, sayı doğrusu üzerinde $E(x_1)$ ve $F(x_2)$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplama formülünün doğruluğunu kontrol et: $d = |x_1 - x_2|$ yani, $d = x_1 - x_2, x_1 \geq x_2$ olduğunda, $d = x_2 - x_1, x_2 \geq x_1$ olduğunda.

Koordinat sisteminin kullanımı, düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamamıza imkân verir.

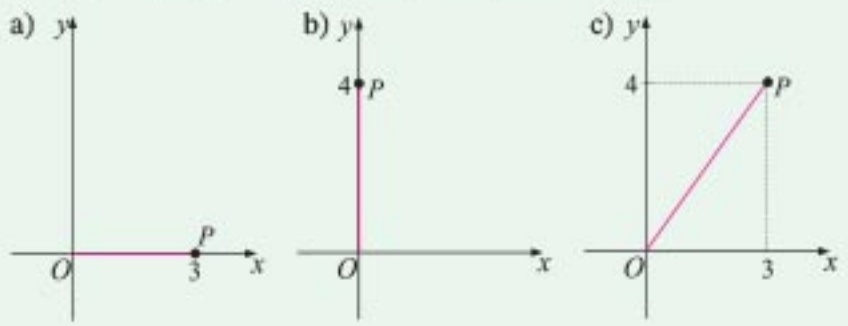
ÖRNEK 3

Bir parçacık, başlangıç noktası $O(0, 0)$'dan son nokta *P*'ye doğru doğrusal olarak hareket eder:
a) $P(3, 0)$ b) $P(0, 4)$ c) $P(3, 4)$.
Parçacık *x*-ekseni boyunca kaç birim, *y*-ekseni boyunca kaç birim yer değiştirecektir? Başlangıç noktasından son noktaya olan uzaklık *d* kaç birimdir?

a) Parçacık *x*-ekseni boyunca 3 birim ve *y*-ekseni boyunca 0 birim yer değiştirecektir. Başlangıç noktasından son noktaya olan uzaklık da 3 birimdir (Şekil 8a).

b) Parçacığın yer değiştirmesi, *x*-ekseni boyunca 0 birim ve *y*-ekseni boyunca 4 birimdir. Başlangıç noktasından son noktaya olan uzaklık da 4 birimdir (Şekil 8b).

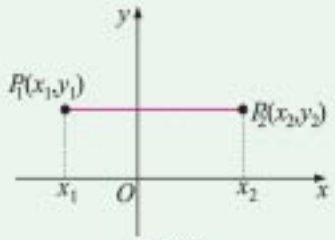
c) Parçacık *x*-ekseni boyunca 3 birim ve *y*-ekseni boyunca 4 birim yer değiştirecektir (Şekil 8c). Başlangıç noktasından son noktaya olan uzaklık, Pisagor teoremiyle hesaplanır:
$d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ birim.



Şekil 8

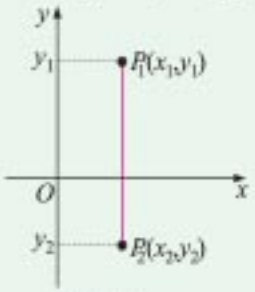
Koordinat düzleminde $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık d'yi belirleyelim.

Eğer P_1 ve P_2 x-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde bulunuyorsa, $d = |x_1 - x_2|$ (Şekil 9).



Şekil 9

Eğer P_1 ve P_2 y-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde bulunuyorsa, $d = |y_1 - y_2|$ (Şekil 10).



Şekil 10

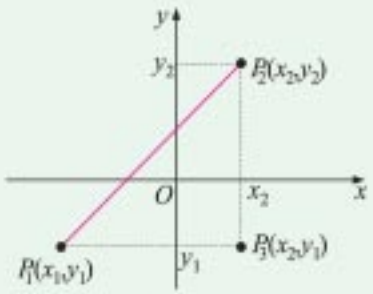
Varsayalım ki P_1 ve P_2 ne x-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde ne de y-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde bulunmaktadır (Şekil 11).

$P_3(x_2, y_1)$ noktasını seçelim.

Üçgen $P_1P_2P_3$ bir dik üçgendir.

Pisagor teoreminden dolayı üçgen $P_1P_2P_3$ için şu sonucu elde ederiz:
$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

Çünkü $x_2 - x_1 \geq 0$ ve $y_2 - y_1 \geq 0$, bundan şu sonuç çıkar:
$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ Her iki tarafın karekökünü alırız: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Şekil 11

ÖRNEK 4

Koordinat düzleminde $P_1(2, -4)$ ve $P_2(-2, -1)$ noktaları arasındaki uzaklık şöyledir:
$d = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Koordinat düzleminde $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplarken, aslında P_1P_2 doğru parçasının uzunluğunu hesaplamış oluruz: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

SORU 3

$A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ ve $C(3, 2)$ noktaları verildiğinde, üçgen ABC'nin kenar uzunluklarını hesapla.

SORU 4

Bir parçacık $A(2, 1)$ noktasından $B(6, 4)$ noktasına, oradan da $C(9, 8)$ noktasına hareket ediyor. Parçacığın katettiği toplam uzaklık ne kadardır?

ALIŞTIRMA SORULARI

-6'dan 6'ya kadar işaretlenmiş eksenlere sahip bir koordinat sistemi çiz.

1. Noktaları çiz:
   a) $A(2, 1)$, $B(2, 5)$, $C(6, 5)$ ve $D(6, 1)$. Daha sonra, $ABCD$ geometrik şeklinin adını belirt.
   b) $E(-4, 0)$, $F(-2, 4)$, $G(0, 0)$. Daha sonra, EFG geometrik şeklinin adını belirt.
   c) $J(-3, -1)$, $K(-3, -3)$, $L(3, -4)$, $M(3, 3)$. Daha sonra, $JKLM$ geometrik şeklinin adını belirt.

2. $E(2, 4)$, $F(1, -1)$ ve $G(-2, -1)$ noktalarını çiz. $EFGH$ bir paralelkenar olacak biçimde H noktasını çiz ve H noktasının koordinatlarını yaz.

3. Ana, Blerim ve Kate, ikizkenar üçgen PQR'nin üçüncü köşesi R noktasını bulmaya çalışmaktadır. $P(1, 0)$ ve $Q(3, 0)$ biliniyor. Ana $R(3, 6)$, Blerim $R(2, -1)$, Kate ise $R(2, 5)$ olarak yazmıştır. Onlardan hangisi R noktasını doğru yazmıştır?

4. $S(-2, 4)$, $T(-4, 1)$ ve $U(-2, -2)$ noktalarını çiz. Daha sonra, $STUV$ bir deltoid olacak biçimde $V(5, a)$ noktasını çiz. İkinci koordinat a'nın değeri nedir?

5. $A(0, 3)$ ve $B(0, -1)$ noktalarını çiz.
   a) Kare $ABCD$'nin köşeleri C ve D'yi çiz ve onların koordinatlarını yaz. İki farklı çözüm mümkündür.
   b) A ve B köşeleri ile çapraz köşeleri oluşturan kare $APBQ$'yu çiz ve P ile Q noktalarının koordinatlarını yaz.

6. Koordinat başlangıcından daha uzakta bulunan nokta hangisidir: $A(4, 2)$ mi yoksa $B(-3, -4)$ mü?

7. $A(5, 6)$ veya $B(5, 3)$ noktalarından hangisi $C(-3, 2)$ noktasına daha yakındır?

8. Bir çelik kirişin uç noktaları $(-4, 2)$ ve $(2, -2)$ koordinatlarındadır. Kirişin uzunluğu nedir?

9. Üçgen ABC'nin kenar uzunluklarını hesapla:
   a) $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ ve $C(3, 2)$ b) $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$ ve $C(-3, -2)$
   Daha sonra üçgen ABC'nin çevresini hesapla.

10. 10. Üçgen ABC'nin köşeleri: a) $A(5, -3)$, $B(2, 4)$ ve $C(3, 2)$ b) $A(3, 1)$, $B(4, 3)$ ve $C(6, 2)$
    Üçgenin ikizkenar olup olmadığını belirle ve ardından çevresini hesapla.

ARAŞTIRMA

Koordinat düzleminde rastgele bir $M(x, y)$ noktası seç. Daha sonra, N noktasının koordinatlarını bul:
a) N noktası, M noktasının x-ekseni üzerindeki eksen simetrisindeki görüntüsüdür.
b) N noktası, M noktasının y-ekseni üzerindeki eksen simetrisindeki görüntüsüdür.
c) N noktası, M noktasının koordinat başlangıcı etrafında $180°$ döndürülmesiyle elde edilen görüntüsüdür.

3.2. Doğru Parçasının Orta Noktası ve Üçgenin Alanı

Doğru Parçasının Orta Noktası

ETKİNLİK

Sayı doğrusu üzerinde uç noktaları şunlar olan doğru parçasının orta noktasını bul:
a) $A(+5)$ ve $B(+3)$ b) $M(-2)$ ve $N(+4)$ c) $P(-1)$ ve $Q(-5)$ d) $S(-3)$ ve $T(+6)$

Daha sonra, sayı doğrusu üzerinde uç noktalarının koordinatları x_1 ve x_2 olan doğru parçasının orta noktasının x_3 koordinatını hesaplama formülünün doğruluğunu kontrol et: $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Koordinat sisteminin kullanımı, uç noktaları verilmiş bir doğru parçasının orta noktasının koordinatlarını bulmamıza imkân verir.

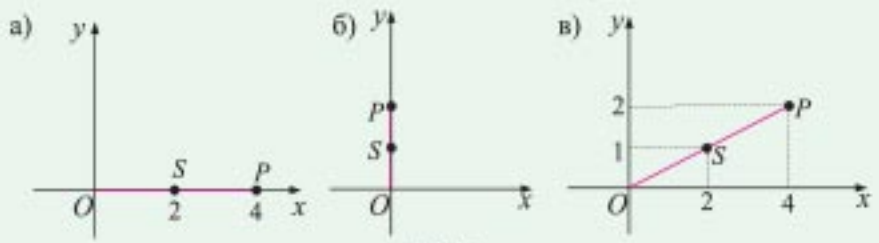
ÖRNEK 1

Bir dağcı, başlangıç noktası $O(0, 0)$'dan şu son noktalara doğru düz bir yol üzerinde hareket eder:
a) $P(4, 0)$ b) $P(0, 2)$ c) $P(4, 2)$.
Yolun OP orta noktası S'nin koordinatlarını bul.

a) Dağcı x-ekseni boyunca hareket eder. Yolun orta noktasının birinci koordinatı: $\frac{4+0}{2} = 2$, ikinci koordinatı ise 0'dır. Yani $S(2, 0)$ (Şekil 1a).

b) Bu durumda dağcı y-ekseni boyunca hareket eder. Yolun orta noktasının birinci koordinatı 0, ikinci koordinatı ise: $\frac{0+2}{2} = 1$, yani S(0, 1) (Şekil 1b).

c) Yolun orta noktasının birinci koordinatı: $\frac{4+0}{2} = 2$, ikinci koordinatı ise: $\frac{0+2}{2} = 1$. Bu durumda $S(2, 1)$ (Şekil 1c).

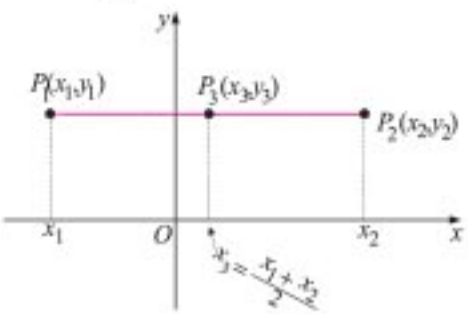


Şekil 1

Varsayalım ki $P_3(x_3, y_3)$, uç noktaları $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ olan doğru parçasının orta noktasıdır.

Eğer P_1 ve P_2 x-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde bulunuyorsa (Şekil 2),

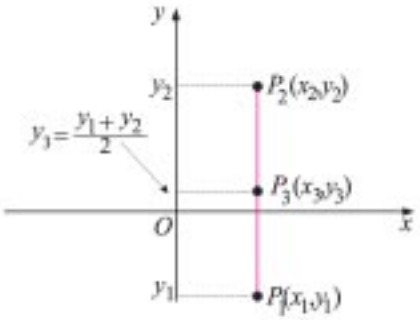
$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ve } y_3 = y_2 = y_1$$



Şekil 2

eğer P_1 ve P_2 y-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde bulunuyorsa (Şekil 3).

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ ve } x_3 = x_2 = x_1$$



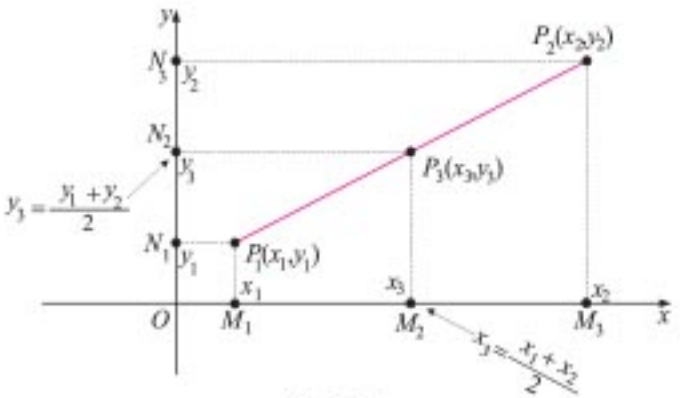
Şekil 3

Varsayalım ki P_1 ve P_2 ne x-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde ne de y-ekseni ile paralel bir doğru üzerinde bulunmaktadır (Şekil 4).

Noktaların x-ekseni üzerindeki dik izdüşümleri M_1, M_2 ve M_3'ün koordinatları sırasıyla x_1, x_2 ve $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, şeklindedir.

Noktaların y-ekseni üzerindeki dik izdüşümleri N_1, N_2 ve N_3'ün koordinatları sırasıyla y_1, y_2 ve $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, şeklindedir.

Buna göre P_3 noktasının koordinatları: $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ve $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



Şekil 4

ÖRNEK 2

Uç noktaları $P_1(4, -5)$ ve $P_2(-6, -3)$ olan doğru parçasının orta noktası $P_3(x_3, y_3)$'ün koordinatlarını bul:

$x_3 = \frac{4 + (-6)}{2} = -1$ ve $y_3 = \frac{-5 + (-3)}{2} = -4$

SORU 1

Uç noktaları $P(3, 7)$ ve $R(11, -1)$ olan homojen bir kirişin ağırlık merkezi T noktası neredesdir?

Üçgenin Alanı

Köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan üçgenin alanı P, aşağıdaki formülle hesaplanır:

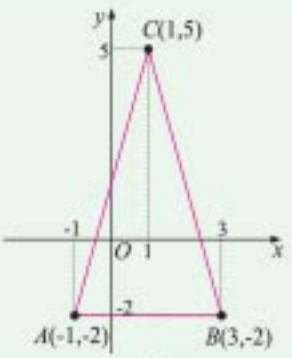
$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

ÖRNEK 3

$A(-1, -2)$, $B(3, -2)$ ve $C(1, 5)$ (Şekil 5) noktaları verildiğinde üçgen ABC'nin alanını hesapla.

Üçgenin alanını köşe koordinatlarıyla hesaplama formülüne göre:

$$P = \frac{1}{2}|(-1)(-2-5) + 3(5-(-2)) + 1(-2-(-2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(-1)(-7) + 3(5+2) + 1(-2+2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|7 + 21 + 0| = 14 \text{ birim kare (birim}^2\text{)}$$



Şekil 5

Üçgen ABC'nin alanı, köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olduğunda, yalnızca köşeler doğrusal (kolineer) ise sıfıra eşittir. Buna göre, üç noktanın $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ kolineer olma koşulu şöyledir:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

ÖRNEK 4

$N(3, 6)$, $M(1, 2)$ ve $P(5, 10)$ noktalarının kolineer olup olmadığını kontrol et.
$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

Üç noktanın kolineer olma koşuluna göre hesaplama:
$1(6 - 10) + 3(10 - 2) + 5(2 - 6) = -4 + 24 - 20 = 0$
Verilen noktalar kolineerdir.

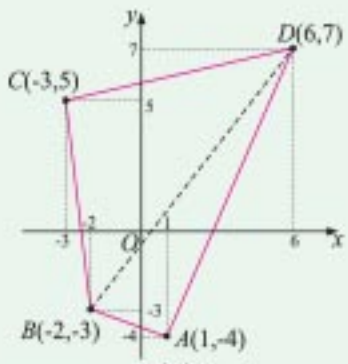
Herhangi bir çokgenin alanını bulmak için çokgeni ayrık üçgenlere böleriz. Bu üçgenlerin birleşimi çokgeni oluşturur. Daha sonra üçgenlerin alanlarını hesaplarız. Çokgenin alanı, bu üçgenlerin alanlarının toplamına eşittir.

ÖRNEK 5

Köşeleri $A(1, -4)$, $B(-2, -3)$, $C(-3, 5)$ ve $D(6, 7)$ olan dörtgen $ABCD$'nin alanını bul (Şekil 6).

Üçgen ABD'nin alanı P_1:

$$P_1 = \frac{1}{2}|1(-3 - 7) + (-2)(7 - (-4)) + 6(-4 - (-3)| =$$
$$= \frac{1}{2}|1(-10) + (-2)(11) + 6(-1)| =$$
$$= \frac{1}{2}|-10 - 22 - 6| = 19 \text{ birim kare}$$



Şekil 6

Üçgen BCD'nin alanı P_2:

$$P_2 = \frac{1}{2}|(-2)(5 - 7) + (-3)(7 + 3) + 6(-3 - 5)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(-2)(-2) + (-3) \cdot 10 + 6(-8)| =$$
$$= \frac{1}{2}|4 - 30 - 48| = 37 \text{ birim kare}$$

Dörtgen $ABCD$'nin alanı, üçgen ABD'nin alanı ile üçgen BCD'nin alanlarının toplamına eşittir.
$P = P_1 + P_2 = 19 + 37 = 56$ birim kare.
Sonuç: $ABCD$ dörtgeninin alanı 56 birim^2'dir.

SORU 2

Köşeleri $A(a, 2a)$, $B(3, 11)$ ve $C(8, 6)$ olan ABC üçgenin alanı 5 birim kare (birim^2) olduğunda, a'nın değeri nedir?

SORU 3

Damyan'ın evinin güney cephesi, köşeleri $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$, $C(3, 4)$ ve $D(-3, 4)$ olan ikizkenar bir $ABCD$ yamacıdır. Damyán güney cephenin tüm yüzeyine güneş panelleri yerleştirmek istiyor. Eğer 1 metrekare güneş panelinden Damyán günde 300 watt-saat elektrik enerjisi üretebiliyorsa, 90 güneşli günde ne kadar elektrik enerjisi üretecektir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Doğru parçası AB'nin orta noktası S'nin koordinatlarını bul:
   a) $A(3, 6)$ ve $B(9, 12)$ b) $A(-1, 2)$ ve $B(3, 5)$ c) $A(-2, -4)$ ve $B(-3, 7)$

2. Uç noktaları $A(10, a)$ ve $B(4, 3)$ olan doğru parçasının orta noktası $S(7, 5)$'tir. Parametre a'nın değeri nedir?

3. Dikdörtgen $ABCD$'de iki karşıt köşe $A(-2, -4)$ ve $C(8, 6)$'dır. Dikdörtgenin köşegenlerinin kesişim noktası S'nin koordinatları nedir?

4. Bir montaj rayı $A(-6, 5)$ noktasından $B(6, 5)$ noktasına yerleştirilmiştir. Rayın orta noktasına konulacak taşıyıcının merkezi olan C noktasının koordinatları nedir?

5. Şekil 7'deki her bir doğru parçasının uzunluğunu hesapla ve orta noktasını bul.

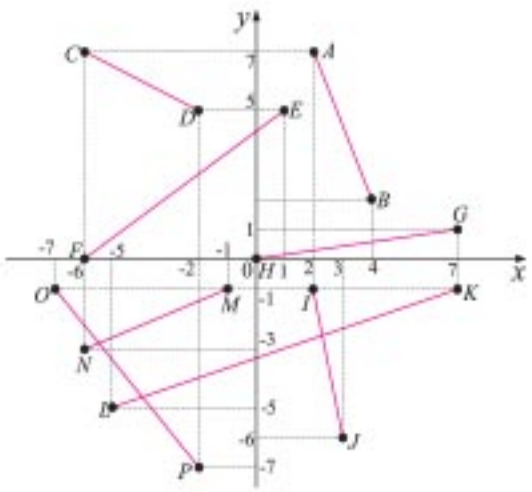
6. $A(0, 1)$, $B(3, 7)$, $C(4, 4)$ ve $D(1, -2)$ verildiğinde, paralelkenar $ABCD$'nin alanını hesapla.

7. $A(1, 4)$, $B(5, 3)$, $C(-3, -5)$ ve $D(-2, 1)$ verildiğinde, yamuk $ABCD$'nin alanını hesapla.

8. $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ ve $C(5, 10)$ noktalarının kolineer olup olmadığını belirle.

9. $A(-2, -3)$, $B(3, -1)$ ve $C(1, 4)$, üçgen ABC'nin köşeleridir. A_1, B_1 ve C_1 sırasıyla kenarlar BC, AC ve AB'nin orta noktaları olmak üzere, üçgen $A_1B_1C_1$'nin alanını hesapla.

10. Bir işçi köşeleri $A(-2, -1)$, $B(4, 3)$ ve $C(1, 6)$ olan bir metal levhayı kaynaklamıştır. Levhanın alanı nedir?



Şekil 7

3.3. Doğrusal Fonksiyon

Doğrusal Fonksiyonun Tanım Kümesi ve Değer Kümesi

ÖRNEK 1

Bir tren A şehrinden hareket etmiştir. 4 kilometre yol aldıktan sonra 50 km/saat sabit hızla ilerlemeye başlamıştır. Tren, hareketinden 1, 2, 3, ... , x saat sonra A şehrinden ne kadar uzaklıkta olacaktır?

1 saat sonra tren A şehrinden $(50 \cdot 1 + 4)$ kilometre uzaklıkta, 2 saat sonra $(50 \cdot 2 + 4)$ kilometre uzaklıkta, x saat sonra ise $(50 \cdot x + 4)$ kilometre uzaklıkta olacaktır.

Eğer kat edilen yolu y ile gösterirsek ve bu yol zamanı x'e bağlı bir fonksiyon olursa, trenin x saat sonra A şehrinden uzaklığı: $y(x) = (50 \cdot x + 4)$ km şeklinde yazılabilir.

Fonksiyon y, geçirilen saat sayısına x bağlı olarak kat edilen kilometre sayısını verir ve bu doğrusal fonksiyon: $y = 50x + 4$ olarak ifade edilir.

Fonksiyon $y = ax + b$ biçiminde olduğunda, burada a ve b reel sayılar, x bağımsız değişken ise, bu fonksiyona **doğrusal fonksiyon** denir.
Sayı a, **bağımsız değişken x'in katsayısı**; sayı b ise doğrusal fonksiyonun **sabit terimi** olarak adlandırılır.

Genel durumda, $y = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun **tanım kümesi** D, reel sayılar kümesidir, yani $D = \mathbb{R}$.

Benzer şekilde, genel durumda katsayı $a \neq 0$ ise, doğrusal fonksiyonun **değer kümesi** V, reel sayılar kümesidir, yani $V = \mathbb{R}$.

Eğer $a = 0$ ise, doğrusal fonksiyon **sabit fonksiyon** adını alır. Sabit fonksiyon $y = b$ için değer kümesi $V = \{b\}$ tek elemanlı bir kümedir.

Fonksiyon belirli koşullar altında incelendiğinde, tanım kümesi ve değer kümesi, reel sayıların $\mathbb{R}$ gerçek altkümeleri olabilir. Bu anlamda, Örnek 1'deki doğrusal fonksiyon için $D = V = [0, +\infty)$ olur.

ÖRNEK 2

a) $y = -3x + 5$ fonksiyonu, $a = -3$ katsayısına ve $b = 5$ sabit terimine sahip bir doğrusal fonksiyondur. Bu durumda tanım kümesi ve değer kümesi $D = V = \mathbb{R}$'dir.

b) $y = 3$ fonksiyonu sabit fonksiyondur, çünkü katsayı $a = 0$'dır. Bu durumda tanım kümesi ve değer kümesi $D = \mathbb{R}$, $V = \{3\}$'tür.

SORU 1

Bir depoda 10 litre su vardır. Her dakika depoya 5 litre su eklenmektedir.

a) Depodaki su miktarının, deponun dolma süresine bağlılığını belirleyen doğrusal fonksiyonu yaz.

b) Doğrusal fonksiyonda, bağımsız değişkenin katsayısı ve sabit terim kaçtır?

c) Fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini belirle.

ÖRNEK 3

$y = ax - 4$ doğrusal fonksiyonunda, $y(3) = 2$ olduğunda katsayı a'nın değerini bul.

Bağımsız değişkenin değeri $x = 3$ olduğunda fonksiyonun değeri $y(3) = 2$'dir. Bu durumda:
$a \cdot 3 - 4 = 2$ Yani, bağımsız değişkenin katsayısı $a = 2$'dir.

Doğrusal Fonksiyonun Grafiği Ve Grafiğin Koordinat Eksenleriyle Kesişimleri

ÖRNEK 4

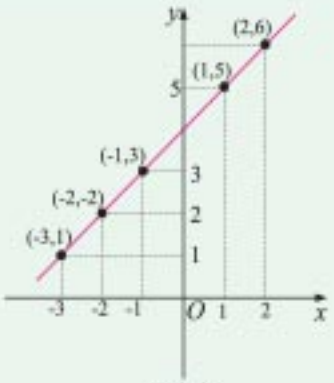
Aşağıdaki tabloda, $y = x + 4$ doğrusal fonksiyonunun bağımsız değişken x'in bazı değerlerine karşılık gelen y değerleri verilmiştir:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	3	4	5	6

Sıralı ikililerin birinci bileşeni $(-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (0, 4), (1, 5), (2, 6)$ bağımsız değişken x'in değeridir; ikinci bileşeni ise fonksiyonun karşılık gelen y değeridir.

Bu sıralı ikililer koordinat düzleminde şu şekilde noktalar olarak gösterilebilir: x-ekseni üzerine birinci koordinat, y-ekseni üzerine ikinci koordinat işlenir.

Noktalar birleştirildiğinde verilen doğrusal fonksiyonun grafiğini görsel olarak gösteren bir doğru elde edilir (Şekil 1).



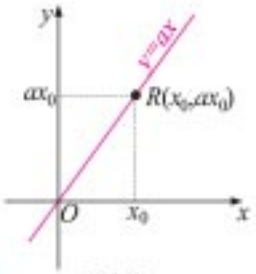
Şekil 1

Fonksiyon $y = ax$'in grafiği, koordinat başlangıcından geçen bir doğrudur (Şekil 2).

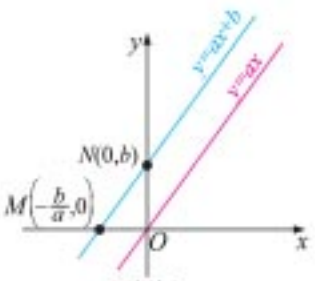
$y = ax$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çizmek için, herhangi bir $R(x_0, ax_0)$ noktasını belirlemek yeterlidir. Daha sonra, koordinat başlangıcından ve bu noktadan geçen bir doğru çizilir.

Doğrusal fonksiyonun grafiği $y = ax + b$, fonksiyonun grafiği $y = ax$'e paralel olan, apsis eksenini $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ noktasında, ordinat eksenini ise $N(0, b)$ noktasında kesen bir doğrudur (Şekil 3).

Bu anlamda, bağımsız değişkenin katsayısı a, doğrusal fonksiyonun **eğim katsayısı** olarak; sabit terim b ise **ordinat eksenini kestiği noktanın ordinatı** olarak adlandırılır. $y = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çizmek için, grafikten iki nokta belirlemek yeterlidir. En sık olarak koordinat eksenleriyle kesişim noktaları olan $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ ve $N(0, b)$ noktaları seçilir. Bağımsız değişkenin değeri $x_0 = -\frac{b}{a}$, fonksiyonun değeri sıfır olan noktadır ve bu değer fonksiyonun **kökü (sıfırı)** olarak adlandırılır.



Şekil 2



Şekil 3

ÖRNEK 5

$y = 2x - 4$ doğrusal fonksiyonunun kökü: $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$.

Fonksiyonun x-ekseni ile kesişimi $M(2, 0)$ noktasında,
y-ekseni ile kesişimi $N(0, -4)$ noktasında gerçekleşir.

ÖRNEK 6

Aşağıdaki doğrusal fonksiyonların grafiğini çiz: a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 2$

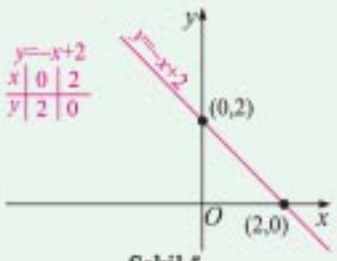
Grafiklerin koordinat eksenleriyle kesişim noktaları bulunur, ardından bu iki noktadan geçen doğru çizilir.

a)



Şekil 4

b)



Şekil 5

SORU 2

Bir otomobil, 25 m/s hızdan -1 m/s² ivmeyle yavaşlamaktadır.
a) Otomobilin zamana bağlı hız grafiğini, otomobil durana kadar çiz.
b) Otomobilin kaç zamanda duracağını belirle.

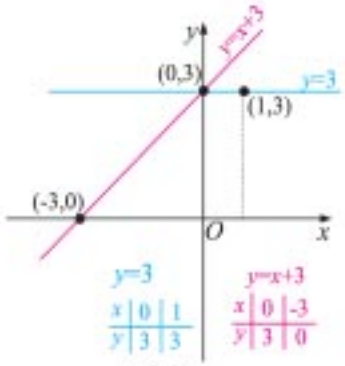
ETKİNLİK

a) Aynı koordinat sisteminde $y = 3$ ve $y = x + 3$ doğrusal fonksiyonlarının grafiklerini çiz. Ordinat eksenini kestikleri noktaları karşılaştır; ardından iki grafiğin karşılıklı konumunu belirle. Ne sonuç çıkarabilirsin?

b) Aynı koordinat sisteminde $y = 2x$ ve $y = 2x - 2$ doğrusal fonksiyonlarının grafiklerini çiz ve doğruların eğim katsayılarını karşılaştır; ardından iki grafiğin karşılıklı konumunu belirle. Ne sonuç çıkarabilirsin?

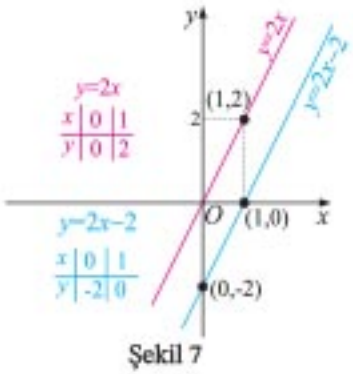
Eğer düzgün çizdiysen, büyük olasılıkla $y = 3$ ve $y = x + 3$ doğrusal fonksiyonlarının grafiklerinin $N(0, 3)$ noktasında kesiştiğini (Şekil 6) elde ettin; çünkü bu doğrusal fonksiyonların ordinat eksenini kestikleri nokta (yani b değeri) aynıdır. Buna karşılık $y = 2x$ ve $y = 2x - 2$ doğrusal fonksiyonlarının grafikleri paraleldir, çünkü bu doğrusal fonksiyonların eğim katsayıları (yani a değerleri) aynıdır (Şekil 7).

a)



Şekil 6

b)



Şekil 7

1. $y = ax + b_1$ ve $y = ax + b_2$ doğrusal fonksiyonlarının grafiklerinin eğim katsayıları aynı, fakat ordinat eksenini kestikleri noktalar farklı ise, bu doğrular paraleldir.
2. Özellikle, $y = ax + b$ fonksiyonunda $a = 0$ olduğunda, grafiği x-ekseni ile paralel olup $N(0, b)$ noktasından geçen bir doğru olur.
3. $y = a_1x + b$ ve $y = a_2x + b$ doğrusal fonksiyonlarının grafiklerinde ordinat eksenini kestikleri nokta aynı (b), fakat eğim katsayıları farklı ise, bu doğrular ordinat eksenini $N(0, b)$ noktasında keserler.

ÖRNEK 7

$y = ax + 6$ doğrusal fonksiyonunun grafiği, $y = 3x + 4$ doğrusal fonksiyonunun grafiğine paralel olacak şekilde katsayı a'yı bul.

İki doğrusal fonksiyonun grafikleri paralel doğrular olur, eğer eğim katsayıları eşit ise. Yani $a = 3$.

ÖRNEK 8

$y = 6x - b$ doğrusal fonksiyonunun grafiği, $y = -2x + 6$ doğrusal fonksiyonunun grafiğiyle aynı noktada ordinat eksenini kesecek şekilde sabit terim b'yi bul.

İki doğrusal fonksiyonun grafikleri ordinat eksenini aynı noktada keser, eğer ordinat eksenini kestikleri noktalar eşit ise. Bu durumda $b = -6$.

SORU 3

Mile, gezi fotoğraflarını telefondan bilgisayara aktarmak istemektedir. Aktarılması gereken fotoğrafların toplam boyutu 750 megabayttır. 300 megabayt aktardıktan sonra, kalan fotoğrafların aktarılması için 90 saniye beklemesi gerektiğini fark etmiştir.

a) Veri aktarımının ortalama hızını belirle.

b) Fotoğrafların aktarım süresine bağlı olarak aktarılan fotoğraf miktarını gösteren bir grafik çiz.

Doğrusal Fonksiyonun Monotonluğu

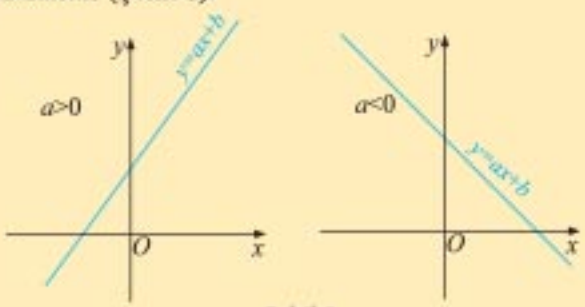
Bağımsız değişkenin değeri arttığında fonksiyonun değeri de artıyorsa, bu doğrusal fonksiyona **artan (monoton artan) fonksiyon** denir.
Bağımsız değişkenin değeri arttığında fonksiyonun değeri azalıyorsa, bu doğrusal fonksiyona **azalan (monoton azalan) fonksiyon** denir.
Sabit fonksiyon için ise ne monoton artan ne de monoton azalan denir.

ÖRNEK 9

a) $y = 3x + 4$ doğrusal fonksiyonu monoton artandır, çünkü $x_1 < x_2$ için:
$3x_1 + 4 < 3x_2 + 4$, yani $y(x_1) < y(x_2)$. Burada eğim katsayısının pozitif olduğunu görürüz.

b) $y = -3x + 4$ doğrusal fonksiyonu monoton azalandır, çünkü
$x_1 < x_2$ için: $-3x_1 + 4 > -3x_2 + 4$, $y(x_1) > y(x_2)$.Bu durumda eğim katsayısı negatiftir.

Doğrusal fonksiyon $y = ax + b$, ancak ve ancak $a > 0$ ise monoton artandır; ancak ve ancak $a < 0$ ise monoton azalandır (Şekil 8).



Şekil 8

SORU 4

Cemail, kütlesi 0,1 kilogram olan bir taşı 85 metre yüksekliğindeki bir kayadan aşağıya atmaktadır.

a) Taşın potansiyel enerjisinin, yüksekliğe bağlı olarak fırlatma anından yere düşene kadar değişimini gösteren grafiği çiz.

b) Bu fonksiyon monoton artan mıdır, yoksa monoton azalan mıdır?

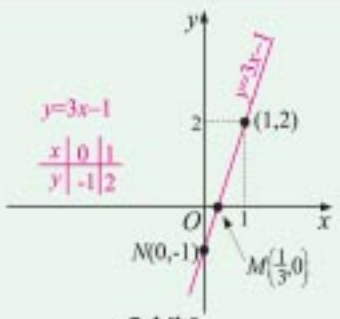
Doğrusal fonksiyonun gidişinin incelenmesi

Bir doğrusal fonksiyonun gidişini incelemek demek:
1. Fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini belirlemek,
2. Koordinat eksenleriyle kesişimlerini saptamak, ve
3. Fonksiyonun artan, azalan ya da sabit olup olmadığını belirlemektir.

ÖRNEK 10

Doğrusal fonksiyon $y = 3x - 1$'in gidişini incele ve grafiğini taslak olarak çiz.

1. Tanım kümesi D ve değer kümesi V için $D = V = \mathbb{R}$.
2. Doğrusal fonksiyonun grafiği,
   x-eksenini $M\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ noktasında ve
   y-eksenini $N(0, -1)$ noktasında keser.
3. Fonksiyon monoton artandır, çünkü eğim katsayısı pozitiftir. Grafiğin kurulumu Şekil 9'da gösterilmiştir.



Şekil 9

SORU 5

Sincap Verka'nın kışı geçirmek için 3000 fındığı vardır. Verka'nın bu yıl topladığı fındık sayısını veren fonksiyon $y = 60x + n$'dir; burada x, Verka'nın fındık topladığı gün sayısıdır.

a) Bu yıl Verka 43 gün fındık topladıysa, geçen yıldan kaç fındığı kalmıştır?

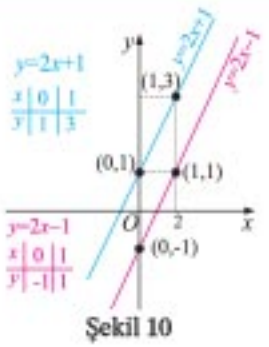
b) Fonksiyonun gidişini incele ve grafiğini çiz.

Doğru Denklemi. İki Doğrunun Paralelliği Ve Dikliği İçin Koşul

Doğrusal bir fonksiyonun grafiğinin bir **doğru** olduğunu gördük. Bu nedenle $y = ax + b$ biçimindeki, a ve b reel sayılar olmak üzere, **doğrusal fonksiyonun analitik ifadesi; eğim katsayısı** a ve **ordinat eksenini kesen noktanın ordinatı** b olan bir **doğrunun denklemi** olarak da yorumlanabilir.

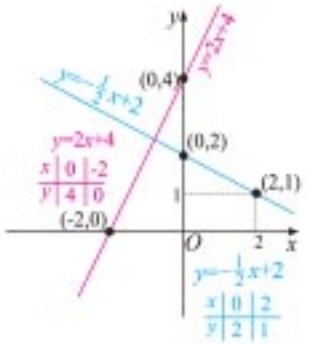
ÖRNEK 11

a) Şekil 10'da iki paralel doğru gösterilmiştir:
$y = 2x + 1$ ve $y = 2x - 1$.
Bu doğrular için eğim katsayıları $a_1 = a_2 = 2$'dir.



Şekil 10

b) Şekil 11'de birbirine dik iki doğru gösterilmiştir:
$y = 2x + 4$ ve $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Bu doğrular için eğim katsayıları çarpımı şöyledir: $a_1 \cdot a_2 = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$



Şekil 11

İki doğrunun paralel olma koşulu:
İki doğru $y = a_1x + b_1$ ve $y = a_2x + b_2$ ancak ve ancak $a_1 = a_2$ olduğunda paraleldir.

İki doğrunun dik olma koşulu:
İki doğru $y = a_1x + b_1$ ve $y = a_2x + b_2$ ancak ve ancak $a_1 \cdot a_2 = -1$ olduğunda diktir.

ÖRNEK 12

Verilen doğru: $y = \frac{1}{4}x + 2$. Bu doğruya göre:
a) Verilen doğruya paralel olup $A(4, 8)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yaz.
b) Verilen doğruya dik olup $A(-3, 1)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yaz.

a) Verilen doğrunun eğim katsayısı $a_1 = \frac{1}{4}$'tür. Paralellik koşuluna göre, aranan doğrunun eğim katsayısı da $a_2 = \frac{1}{4}$'tür. Doğru A(4, 8) noktasından geçtiğine göre: $8 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b_2$, b_2=7. Buna göre doğrunun denklemi: $y = \frac{1}{4}x + 7$.

b) Verilen doğrunun eğim katsayısı $a_1 = \frac{1}{4}$'tür. Dik olma koşuluna göre aranan doğrunun eğim katsayısı $a_2 = -4$'tür. Doğru $A(-3, 1)$ noktasından geçtiğine göre: $1 = -4 \cdot (-3) + b_2$, yani $b_2 = -11$. Buna göre doğrunun denklemi: $y = -4x - 11$

SORU 6

Üçgen ABC verilmiştir; köşeleri $A(-5, -2)$, $B(7, 6)$ ve $C(5, 4)$'tür. AB kenarına indirilen yüksekliğin denklemini yaz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. İkizkenar bir üçgenin çevresi $L = 4\,cm + 2b$ ile verilmiştir; burada tabanı 4 cm, kenarı b (b > 2 cm)'dir.
   a) Çevrenin kenara bağlılığını belirleyen doğrusal fonksiyonu yaz.
   b) Doğrusal fonksiyonun eğim katsayısı ve ordinat eksenini kesen noktası nedir?
   c) Fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini belirle.

2. Aşağıdaki doğrusal fonksiyonun grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını bul:
   a) $y = x - 3$ b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$ c) $y = \frac{4 - x}{9}$ d) $y = \frac{2}{7} - \frac{x + 1}{3}$

3. Aşağıdaki doğrusal fonksiyonlarda eğim katsayısı a'nın değerini hesapla:
   a) $y = ax + 7$, eğer fonksiyonun kökü $x_0 = -\frac{2}{3}$ ise.
   b) $y = \frac{1}{a+1}x + \frac{3}{a}$, eğer grafiği $N(0, 3)$ noktasında y-ekseniyle kesişiyorsa.
   c) $y = \frac{2a+3}{5}x - \frac{1+x}{3}$, eğer grafiği $M(1, 1)$ noktasından geçiyorsa.
4. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi artandır, hangisi azalandır?
   a) $y = -x - 3$ b) $y = \frac{1}{2} - 3x$ c) $y = \frac{x}{4} + 2$ d) $y = -x$
5. Aşağıdaki doğrusal fonksiyonların gidişini incele ve grafiklerini çiz:
   a) $y = -x + 7$ b) $y = 3x + 9$ c) $y = 2 - 6x$ d) $y = x - 6$.
6. Bir elektrikli otomobil ev şarj cihazına bağlanmıştır. Bataryanın kapasitesi 100 kWh'dir. Şarj cihazı, bataryayı her saatte 8 kWh sabit hızla doldurmaktadır.
   a) Bataryanın başlangıçta boş olduğunu kabul ederek, bataryadaki enerji miktarını modelleyen doğrusal fonksiyonu yaz.
   b) 4,5 saat sonra bataryada ne kadar enerji bulunur?
   c) Bataryanın tamamen dolması için ne kadar süre gerekir?
7. Bir cep telefonunun bataryasının(pilinin) kalan kapasitesi, zamana bağlı olarak yüzde cinsinden $y = -5x + 80$ fonksiyonu ile verilmiştir; burada x saat cinsindendir. Lule, telefonun batarya kapasitesi %15'e düştüğünde şarja takmaktadır.
   a) Lule telefonu kaç saat sonra şarja takar?
   b) Telefonun kalan kapasitesinin zamana bağlı grafiğini çiz.
   c) Fonksiyon monoton artan mıdır yoksa monoton azalan mıdır?
8. Bir bardak sıcak çayın sıcaklığı her dakika 3°C azalmaktadır. Çayın başlangıç sıcaklığı 85°C'dir.
   a) 8 dakika sonra çayın sıcaklığı kaç °C olur?
   b) Çay kaç dakika sonra 40°C sıcaklığa ulaşır?
   c) Fonksiyonun gidişini incele ve grafiğini çiz.
9. 1 amperlik akım şiddetiyle yapılan su elektrolizinde, açığa çıkan hidrojen miktarı $y = (0{,}115x + 0{,}5)$ mililitre ile verilmektedir; burada x zaman (saniye) cinsindendir.
   a) Hidrojen miktarının zamana bağlı grafiğini çiz.
   b) Elektrolizin başlangıcında açığa çıkan hidrojen miktarı nedir?
   c) Açığa çıkan hidrojen miktarının 20 mililitreden büyük olması için ne kadar süre geçmesi gerekir?
10. $A(-2, -5)$ noktasından geçen ve $y = 4x + 7$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini yaz.
11. Verilen doğrular arasından üç çift paralel doğruyu belirle.

$y = 7 - x$	$2y + 5x = 3$	$5y - x = 2$	$5x = 7 - 2y$	$x - y = 3$
$x + y = 27$	$-x = 5y$	$3y + 5 = 3x$	$y + 5x = 1$	$3y - 5x = 5$

12. $2x + 2y = 5$ doğrusuna dik ve $B(1, -2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bul.

13. MN doğru parçasının uç noktaları $M(7, 4)$ ve $N(2, 5)$'tir. MN doğrusuna dik olup doğru parçası MN'yi ikiye bölen AB doğrusunun denklemini yaz.

14. Dikdörtgen $ABCD$'nin köşelerinden $A(-4, -5)$ ve $C(3, 8)$ verilmiştir. Ayrıca dikdörtgenin bir kenarının üzerinde bulunduğu doğrunun denklemi $x + 2y - 19 = 0$'dır. Dikdörtgenin diğer kenarlarının üzerinde bulundukları doğruların denklemlerini yaz.

ARAŞTIRMA

a) Aynı koordinat sisteminde $y = 2x$ ve $y = 3x$ doğrusal fonksiyonlarını çiz. İki fonksiyonun artma hızlarının, eğim katsayılarına bağlı olarak ilişkisini belirle.

b) Aynı koordinat sisteminde $y = -2x$ ve $y = -3x$ doğrusal fonksiyonlarını çiz. İki fonksiyonun azalma hızlarının, eğim katsayılarına bağlı olarak ilişkisini belirle.

c) Genel durumda $y = ax$ biçimindeki doğrusal fonksiyon için artma ve azalma hızının eğim katsayısı a ile arasında nasıl bir ilişki olduğunu araştır ve ortaya çıkar.

3.4. Kuvvet Fonksiyonları

ÖRNEK 1

Eğer bir karenin kenar uzunluğu $a = 2$ cm ise, karenin alanı: $a^2 = 2^2 = 4\,\text{cm}^2$. Kenarı 3 cm, 4 cm, ..., x cm olursa, karenin alanı kaç olur?

Karenin alanı, kenar uzunluğuna bağlı olarak değişir.

Kenar uzunluğu x olan karenin alanını tanımlayan fonksiyon y, bir kuvvet fonksiyonu örneğidir.

$y = ax^n$ biçimindeki fonksiyonlar eğer a bir reel sayı ($a \neq 0$), n bir tam sayı ($n \neq 0, 1$), ve x **bağımsız değişkense** bu tür fonksiyonlara **kuvvet fonksiyonu**ları denir.

Tanımda yer alan $a \neq 0$ ve $n \neq 0, 1$ koşulları gereklidir; çünkü $a = 0$ veya $n = 0, 1$ için fonksiyonlar: $y = ax^n = 0 \cdot x^n = 0$ veya $y = ax^0 = a$ sabit fonksiyon, $y = ax^1 = ax$ doğrusal fonksiyon olur. Her iki tür fonksiyon da kuvvet fonksiyonları sınıfına girmez.

ÖRNEK 2

Fonksiyonlar $y = x^2$, $y = 5x^2$, $y = \frac{1}{x}$ ve $y = \frac{1}{2x^6}$ kuvvet fonksiyonlarına örnektir.

1^0. $y = ax^n$ olsun; burada n çift doğal sayıdır.

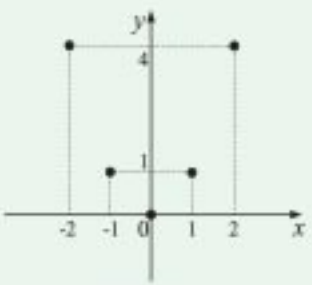
ÖRNEK 3

Fonksiyonun $y = x^2$ grafiğini çiz.

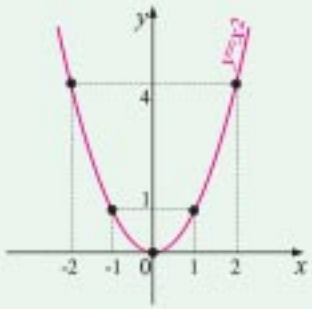
Birkaç noktayı, değerler tablosu yardımıyla bulalım:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$

Daha sonra bu noktaları seçilen koordinat sistemine yerleştiririz (Şekil 1).



Şekil 1



Şekil 2

Tablodaki noktaları kesiksiz bir çizgi ile birleştirirsek, fonksiyonun grafiğini elde ederiz (Şekil 2). Daha doğru bir grafik elde etmek için, (x, x^2) koordinatlarına sahip daha fazla nokta almak uygundur.

Fonksiyon $y = x^2$'ye ayrıca **kare fonksiyonu** denir.

Genel durumda **tanım kümesi** $D = \mathbb{R}$, **değer kümesi** ise $V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$'dır. Fonksiyon belirli koşullarda incelendiğinde, tanım kümesi ve değer kümesi, reel sayı kümesinin ya da sıfır dâhil negatif olmayan reel sayıların gerçek altkümesi olabilir.

Fonksiyon, aralık $(-\infty, 0)$ üzerinde ise, **azalan** (yani kuvvet fonksiyonu ve monoton azalan), aralık $(0, +\infty)$ üzerinde ise, **artan** (yani kuvvet fonksiyonu ve monoton artan) bir fonksiyondur.

Fonksiyon $y = ax^2$'nin grafiği, **parabola** adı verilen eğridir. Nokta $O(0, 0)$ parabolün **tepe** noktası olarak adlandırılır.

ÖRNEK 4

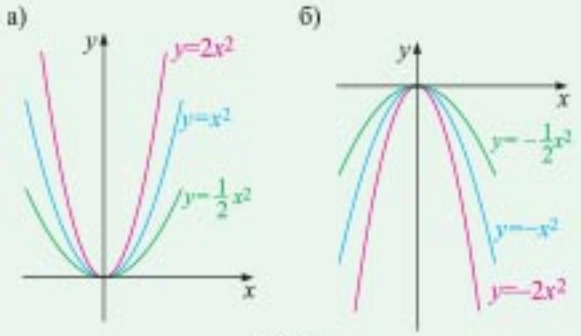
Aynı koordinat sisteminde aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiz:

a) $y = x^2$, $y = 2x^2$ ve $y = \frac{1}{2}x^2$ b) $y = -x^2$, $y = -2x^2$ ve $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Değerler tablosunu her fonksiyon için ayrı ayrı oluştururuz.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$
$y = 2x^2$	$2 \cdot (-2)^2 = 8$	$2 \cdot (-1)^2 = 2$	$2 \cdot 0^2 = 0$	$2 \cdot 1^2 = 2$	$2 \cdot 2^2 = 8$
$y = \frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$	$\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$	$\frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$
$y = -x^2$	$-(-2)^2 = -4$	$-(-1)^2 = -1$	$-0^2 = 0$	$-1^2 = -1$	$-2^2 = -4$
$y = -2x^2$	$(-2) \cdot (-2)^2 = -8$	$(-2) \cdot (-1)^2 = -2$	$(-2) \cdot 0^2 = 0$	$(-2) \cdot 1^2 = -2$	$(-2) \cdot 2^2 = -8$
$y = -\frac{1}{2}x^2$	$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^2 = -2$	$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)^2 = -\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0^2 = 0$	$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2^2 = -2$

Eğer her fonksiyon için tabloda verilen koordinatlara sahip noktaları kesiksiz bir çizgi ile birleştirirsek, fonksiyonun grafiğini elde ederiz (Şekil 3).



Şekil 3

a) Fonksiyonlar $y = x^2$, $y = 2x^2$ ve $y = \frac{1}{2}x^2$ aralık $(-\infty, 0)$ üzerinde **kuvvet fonksiyonu olarak azalan**, aralık $(0, +\infty)$ üzerinde ise **kuvvet fonksiyonu olarak artan** fonksiyonlardır (Şekil 3a). Bu fonksiyonların grafikleri **yukarıya doğru açılan** parabolalardır.

b) Fonksiyonlar $y = -x^2$, $y = -2x^2$ ve $y = -\frac{1}{2}x^2$ aralık $(-\infty, 0)$ üzerinde **kuvvet fonksiyonu olarak artan**, aralık $(0, +\infty)$ üzerinde ise **kuvvet fonksiyonu olarak azalan** fonksiyonlardır (Şekil 3b). Bu fonksiyonların grafikleri **aşağıya doğru açılan** parabolalardır.

ÖRNEK 5

a) Baş kuantum sayısı $n = 1, 2, 3, 4, 5$ olduğunda manyetik kuantum sayısı m nasıl değişir? Ne gözlemliyorsun?

b) Baş kuantum sayısı n'e bağlı olarak toplam manyetik kuantum sayılarının m fonksiyonunu yaz.

c) Fonksiyonun grafiğini çiz.

Baş kuantum sayısı n, atomdaki elektronun ana enerji seviyesini temsil eder. Onun değerleri $n = 1, 2, 3, \ldots$ şeklindedir. Verilen bir n için, izin verilen yörünge kuantum sayıları $l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$'dir. Verilen bir l için, izin verilen manyetik kuantum sayıları: $m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l - 1, l$ $m = -l, -l + 1, \ldots, 0, \ldots, l - 1, l$ şeklindedir. Böylece, verilen n seviyesi için izin verilen m değerlerinin sayısı, her $l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ için m değerlerinin toplamı olur.

a) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için m'nin izin verilen değerlerinin sayısını hesaplayalım:

Eğer $n = 1$ ise, o hâlde $l = 0$, buna göre $m = 0$.

Bu durumda m'nin toplam değer sayısı 1'dir (tablonun ilk satırında gösterilmiştir).

Eğer $n = 2$ ise, orbital sayı $l = 0$ veya $l = 1$'dir. $l = 0$ için manyetik sayı $m = 0$, $l = 1$ için manyetik sayı $m = -1, 0, 1$'dir.

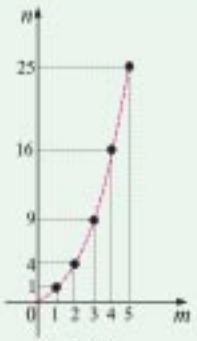
Sonuçta, m'nin toplam değer sayısı $1 + 3 = 4$'tür (tablonun ikinci satırında gösterilmiştir).

n	l	m	m için toplam değerler	
1	0	0	1	1
2	0	0	1	4
	1	$-1, 0, 1$	3	
3	0	0	1	9
	1	$-1, 0, 1$	3	
	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	5	
4	0	0	1	16
	1	$-1, 0, 1$	3	
	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	5	
	3	$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$	7	
5	0	0	1	25
	1	$-1, 0, 1$	3	
	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	5	
	3	$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$	7	
	4	$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$	9	

Manyetik kuantum sayısı m'nin, verilen baş kuantum sayısı n için mümkün değerlerinin sayısı: $m = n^2$.

b) Manyetik kuantum sayısı m'nin baş kuantum sayısı n'ye bağlılığını veren fonksiyon, tanım kümesi $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olan $m = n^2$ şeklindeki kare fonksiyondur.

c) Fonksiyonun grafiği Şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4

2^0. $y = ax^n$ olsun, burada n tek doğal sayı ve $n \neq 1$'dir.

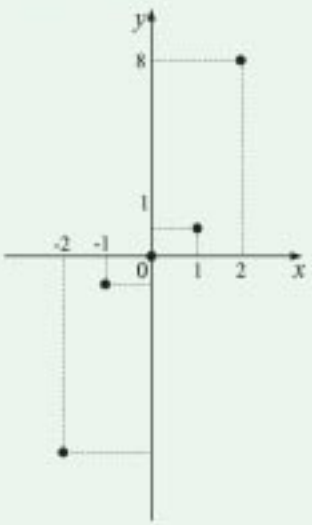
ÖRNEK 6

$y = x^3$ fonksiyonunun grafiğini çiz.

Grafikten bazı noktaları değerler tablosu yardımıyla buluyoruz:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	$(-2)^3 = -8$	$(-1)^3 = -1$	$0^3 = 0$	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$

Sonra, bu noktaları seçilen koordinat sistemine yerleştiriyoruz (Şekil 5).



Şekil 5



Şekil 6

Eğer tabloda verilen koordinatlara sahip noktaları kesintisiz bir çizgiyle birleştirirsek, fonksiyonun grafiğini elde ederiz (Şekil 6). Daha doğru bir grafik elde etmek için (x, x^3) koordinatlı daha fazla noktanın seçilmesi uygundur.

Genel durumda, **tanım kümesi** $D = \mathbb{R}$, **değer kümesi** ise $V = \mathbb{R}$'dir. Eğer fonksiyon belirli koşullarda incelenirse, tanım kümesi ve değer kümesi reel sayıların gerçek bir alt kümesi olabilir. Fonksiyon, tüm tanım kümesi üzerinde **kuvvetli bir biçimde artandır**. Fonksiyon $y = x^3$'ün grafiğine **kübik parabol** denir.

SORU 1

Aynı koordinat sisteminde şu fonksiyonların grafiklerini çiz ve özelliklerini ifade et:

a) $y = x^3$, $y = 2x^3$ ve $y = \frac{1}{2}x^3$ b) $y = -x^3$, $y = -2x^3$ ve $y = -\frac{1}{2}x^3$.

3^0. $y = ax^n$ olsun, burada n negatif tek sayıdır.

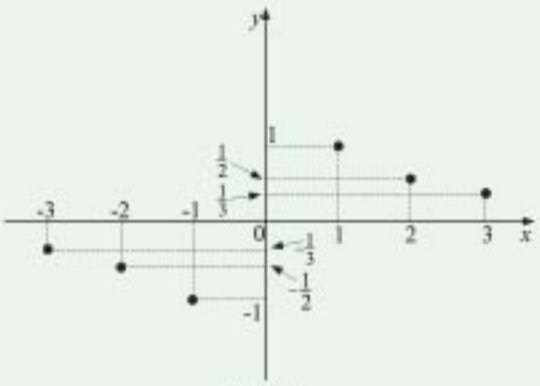
ÖRNEK 7

$y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiz.

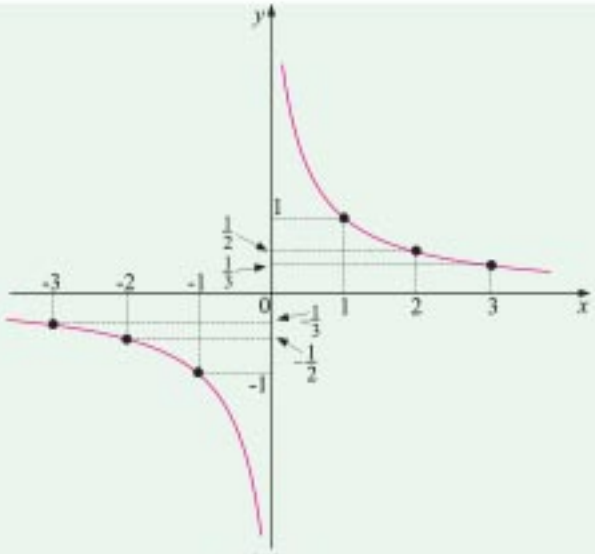
Fonksiyon için değerler tablosunu oluşturuyoruz:

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-1} = -1$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Elde edilen değerleri seçilen koordinat sistemine yerleştiriyoruz (Şekil 7).



Şekil 7



Şekil 8

Fonksiyonun grafiğini elde etmek için, tabloda verilen koordinatlara sahip noktaları kesintisiz bir çizgiyle birleştiririz (Şekil 8).

$y = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için **tanım kümesi** ve **değer kümesi**:

$D = V = R \setminus \{0\}$.

Fonksiyon, tüm tanım kümesi üzerinde kuvvetli bir biçimde azalandır. Grafiği **hiperbola** adı verilen eğridir.

SORU 2

Aynı koordinat sisteminde şu fonksiyonların grafiklerini çiz ve özelliklerini ifade et:

a) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ ve $y = \frac{1}{2x}$ b) $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$ ve $y = -\frac{1}{2x}$

4°. $y = ax^n$ olsun, burada n negatif çift sayıdır.

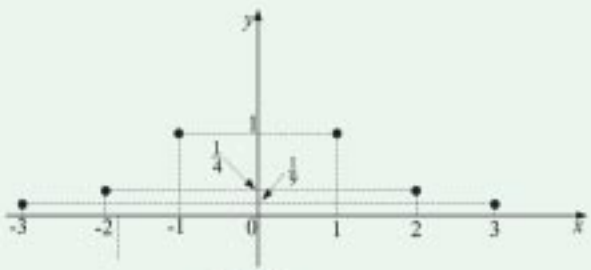
ÖRNEK 8

$y = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiz.

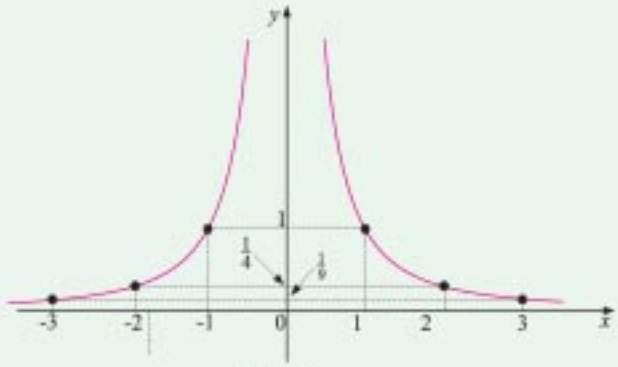
Grafikten bazı noktaları, değerler tablosu yardımıyla buluyoruz:

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{(-1)^2} = 1$	$\frac{1}{1^2} = 1$	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Sonra bu noktaları seçilen koordinat sistemine yerleştiriyoruz (Şekil 9).



Şekil 9



Şekil 10

Elde edilen noktaları birleştirerek fonksiyonun grafiğini buluruz (Şekil 10).

Genel durumda, **tanım kümesi** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ve **değer kümesi** $V=\mathbb{R}^+$. Fonksiyon, $(-\infty, 0)$ aralığında kuvvetli bir biçimde **artar** ve $(0, +\infty)$ aralığında kuvvetli bir biçimde **azalır**.

SORU 3

Aynı koordinat sisteminde aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiz ve özelliklerini ifade et:

a) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{2}{x^2}$ ve $y=\frac{1}{2x^2}$

b) $y=-\frac{1}{x^2}$, $y=-\frac{2}{x^2}$ ve $y=-\frac{1}{2x^2}$

ÖRNEK 9

Bir uzay aracında astronotlar, iki cismin birbirini çekme kuvvetini ölçmeye imkân verecek bir deney yapmaktadırlar. Deney, cisimlerin 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm ve 5 cm uzaklıklara yerleştirilmesinden ibarettir. İlk yerleştirmede cisimler 1 cm uzaklığa konulduğunda, çekim kuvvetinin 3600 mikronyuton olduğu belirlenmiştir.

a) Diğer uzaklık değerleri için çekim kuvvetini hesapla ve bir değerler tablosu oluştur.

b) Tabloya dayanarak, uzaklık (cm cinsinden) ile kuvvet (μN cinsinden) arasındaki bağımlılığın grafiğini çiz.

a) Çekim kuvveti şu formülle verilir:

$$F=G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2} \qquad (1)$$

Burada F kuvveti, G evrensel çekim sabiti, m_1 ve m_2 cisimlerin kütleleri, r ise cisimler arasındaki uzaklıktır.

Cisimlerin kütleleri deney süresince değişmediğinden, sabit kabul edilebilir. Formül (1)'den:

$G\cdot(m_1\cdot m_2)=F\cdot r^2$ elde ederiz.

$F_1=3600\ \mu N=3600\cdot10^{-6}$ N ve $r_1=1$ cm $=0.01$ m yerine koyarsak:

$G\cdot(m_1\cdot m_2)=F_1\cdot r_1^2=3600\cdot10^{-6}\ \text{N}\cdot(0.01\text{m})^2=3600\cdot10^{-10}\ \text{Nm}^2$.

$r_2=2$ cm olduğunda kuvvet F_2 için:

$F_2=G\frac{m_1\cdot m_2}{r_2^2}=\frac{3600\cdot10^{-10}\text{Nm}^2}{4\cdot10^{-4}\text{m}^2}=900\cdot10^{-6}\text{N}$ şeklinde sonuç elde ederiz.

Aynı suretle, $r_3 = 3$ santimetre, $r_4 = 4$ santimetre ve $r_5 = 5$ santimetre olan mesafede gravitasyon kuvveti için:

$F_3 = 400 \cdot 10^{-6}$ N, $F_4 = 225 \cdot 10^{-6}$ N ve $F_5 = 144 \cdot 10^{-6}$ N.

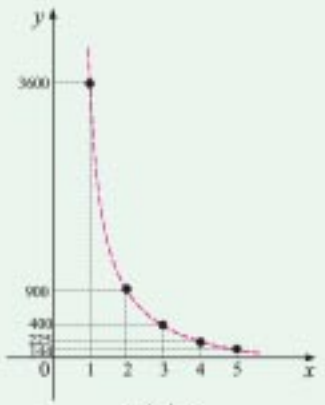
elde ederiz.

1	2	3	4	5
3600	900	400	225	144

Hesaplamalardan elde olunan neticeleri tabloya yerleştiriyoruz:

b) Tablodaki verilere göre, kuvvetin (mikronyuton cinsinden) uzaklığa (santimetre cinsinden) bağlı grafiğini çiziyoruz (Şekil 11).

X ekseninde her bir birim 1 santimetreyi gösterecek; taksimatın uzunluğunun ne olduğu önemli değildir. *Y* ekseninde ise kaç μN'nin bir birime karşılık geleceğini biz seçebiliriz. Kuvvet 144 μN ile 3600 μN arasında değiştiği için, bir birimi 500 μN olarak alıyoruz.



Şekil 11

ALIŞTIRMA SORULARI

Aynı koordinat sisteminde şu fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

1. a) $y = x^2$, $y = 3x^2$ ve $y = \frac{1}{3}x^2$ b) $y = -x^2$, $y = -3x^2$ ve $y = -\frac{1}{3}x^2$
2. a) $y = x^3$, $y = 3x^3$ ve $y = \frac{1}{3}x^3$ b) $y = -x^3$, $y = -3x^3$ ve $y = -\frac{1}{3}x^3$
3. a) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ ve $y = \frac{1}{3x}$ b) $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{3}{x}$ ve $y = -\frac{1}{3x}$
4. a) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{3}{x^2}$ ve $y = \frac{1}{3x^2}$ b) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = -\frac{3}{x^2}$ ve $y = -\frac{1}{3x^2}$
5. Bir kaya, yüksekliği 40 metre olan bir deniz kayalığından düşmektedir.
   a) Kayalığın denize düşmesi için ne kadar süre gerekir? (Yerçekimi ivmesi $g = 10$ m/s^2 alınacaktır.)
   b) Kaya, düşme süresinin yarısında deniz seviyesinin ne kadar üzerinde olacaktır?
6. Küçük Şeyla, kenar uzunluğu 1 santimetre olan küçük küplerle oynamaktadır. Bu küpleri birleştirerek kenarları 2 cm'den 6 cm'ye kadar olan büyük küpler yapmaktadır.
   a) Şeyla'nın büyük küpleri yapmak için kaç küçük küpe ihtiyacı vardır?
   b) Küçük küplerin sayısı ile büyük küplerin kenar uzunluğu arasındaki ilişkiyi bir tabloda gösteriniz.
7. a) Sime, uzunluğu 25 santimetre olan bir ipe bağlı topu çevirmektedir. Eğer top her saniyede bir tam tur yapıyorsa, açısal hızını ve çizgisel hızını bulunuz. Topun kütlesi 50 gram ise, topun merkezcil kuvvetini hesaplayınız..
   b) Sime, ipin uzunluğunu her seferinde 5 santimetre kısaltarak 5 santimetre kalana kadar döndürmeye devam etmektedir. Top her saniyede bir tam tur yapmaya devam ettiğine göre, merkezcil kuvvetin büyüklüğü nasıl değişecektir?

8. Dünya ile Ay arasındaki mesafe 363 300 kilometre ile 405 500 kilometre arasında değişir. Ay, Dünya'ya en yakın konumdaki kütleçekim kuvvetine göre, en uzak konumda kütleçekim kuvveti yüzde kaç azalır, hesaplayınız.

ARAŞTIRMA

$y = ax^n$ fonksiyonunun, $y = x^n$ fonksiyonuna göre üstel büyüme oranını (artma hızını), yani üstel azalma oranını(hızını) araştırın ve karşılaştırın eğer:

a) $-\infty < a < -1$ b) $1 < a < +\infty$ c) $-1 < a < 0$ d) $0 < a < 1$.

3.5. Üstel Fonksiyon

ÖRNEK 1

Bakteriler çoğunlukla basit bölünme yoluyla çoğalır; yani bir bakteriden iki bakteri meydana gelir. Başlangıçta bir bakteri ile kültüre başladığımızı ve bu bakterinin her saat başında bölündüğünü varsayalım. Bu durumda bakteri sayısı her saatin sonunda iki katına çıkacaktır.

Aşağıdaki tabloda her saatin sonunda elde edilen bakteri sayısı gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, yalnızca on saat içinde bir bakteri binin üzerinde bakteriye dönüşmektedir.

Saat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bakteriler	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Benzer nitelikteki süreç ve durumları tanımlamak için üstel fonksiyonu kullanırız. Bunun için şunu bilmemiz gerekir: her pozitif gerçek sayı a ve her gerçek sayı x için, üs ifadesi a^x tek bir pozitif gerçek sayıyla belirlenmiştir. Ayrıca, her pozitif $a \neq 1$ için ve her pozitif A sayısı için, öyle bir x gerçel sayısı vardır ki $a^x = A$ olur.

Biçimi $y = Ma^x$ olan, $a > 0$ ve $a \neq 1$, $M > 0$ ve x **bağımsız değişken** olan, fonksiyonlara **üstel fonksiyon** denir.

Tanımda $a \neq 1$ koşulu gereklidir; çünkü $a = 1$ olduğunda $y = a^x = 1^x = 1$ sabit fonksiyonu elde edilir ve bu fonksiyon üstel fonksiyonlar sınıfına girmez.

ÖRNEK 2

Fonksiyonlar $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ve $y = 0{,}25^x$ üstel fonksiyonlara örnektir.

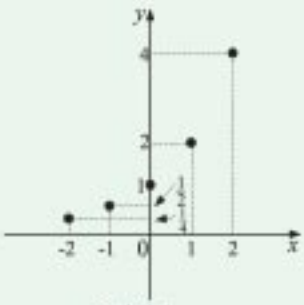
ÖRNEK 3

$y = 2^x$ fonksiyonun grafiğini çiz:

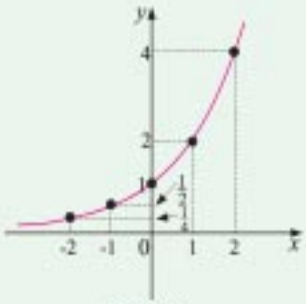
Tablonun yardımıyla grafikte bazı noktaları bulalım:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$

Bu tablo yardımıyla elde edilen noktaları seçilen koordinat sistemine yerleştiriyoruz (Şekil 1).



Şekil 1



Şekil 2

Eğer daha fazla nokta işaretlersek, fonksiyonun grafiğine dair bir fikir (tasvir) elde ederiz (Şekil 2).

Üs ifadesi 2^x her x değeri için tanımlıdır; bu nedenle verilen üstel fonksiyonun tanım kümesi D, tüm reel sayılar kümesidir, yani $D = \mathbb{R}$.
Her reel sayı x için $2^x > 0$ geçerlidir ve her pozitif reel sayı A için öyle bir tek reel sayı x vardır ki $2^x = A$ olur; bu yüzden verilen üstel fonksiyonun değerler kümesi tüm pozitif reel sayılardan oluşur, yani $V = \mathbb{R}^+$.

Fonksiyon **üstel olarak artmaktadır** (fonksiyon üstel ve monoton artandır); çünkü $x_1 < x_2$ olduğunda $2^{x_1} < 2^{x_2}$ olur.
Fonksiyonun grafiği (0, 1) noktasından geçmektedir.
x değerleri sınırsız biçimde azaldığında, fonksiyonun karşılık gelen değerleri hep pozitif kalır, azalır fakat hiçbir zaman sıfıra ulaşmaz. Bu, fonksiyonun grafiğinin x eksenine yaklaştığı, fakat asla kesişmediği veya dokunmadığı anlamına gelir. O hâlde, x ekseni fonksiyonun asimptotu olur ($y = 2^x$ için).
Peki, üstel büyüme tam olarak ne demektir?

Üstel büyüme, başlangıçtaki büyüklüğün zamanla sabit bir çarpan oranında ve eşit zaman aralıklarında artması demektir.
Zaman içerisinde üstel büyümenin görüldüğü süreçler çoğunlukla şu biçimdeki üstel fonksiyonlarla modellenir: $y = M\,a^x$, burada $a > 1$, $a \neq 1$ ve $M > 0$.
Eğer fonksiyon belirli koşullarda incelenirse, tanım kümesi $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi de olabilir.

ÖRNEK 4

Üstel büyümeyi daha iyi kavrayabilmek için, üstel fonksiyon $y = 2^x$'in değerlerini, üs fonksiyon $y = x^2$'nin ve doğrusal fonksiyon $y = 2x$'in değerleriyle karşılaştıralım.

x	$y=2^x$	$y=x^2$	$y=2x$
0	1	0	0
1	2	1	2
2	4	4	4
3	8	9	6
4	16	16	8
5	32	25	10
6	64	36	12

Tablodan şu sonuca varabiliriz: üstel büyüme, kuvvet (derece,üs) büyümesinden daha hızlıdır; kuvvet büyümesi de doğrusal büyümeden daha hızlıdır.

ÖRNEK 5

İdeal yaşam koşullarına sahip bir laboratuvarda iki tür bakteri bulunmaktadır: Escherichia coli ve Clostridium perfringens. Escherichia coli'nin çoğalma dönemi 20 dakika, Clostridium perfringens'inki ise 10 dakikadır. Deneyin başında her iki türden yaklaşık 3 bakteri vardır ve hiçbir bakterinin ölmeyeceği varsayılmaktadır.

a) 1 saat sonra her bir türden kaç bakteri olacaktır?

b) Escherichia coli için, bakteri sayısının zamana bağlı fonksiyonunu yaz.

c) Clostridium perfringens için, bakteri sayısının zamana bağlı fonksiyonunu yaz.

ç) Her iki fonksiyonu aynı koordinat sisteminde çiz ve hangisinin üstel büyümesinin daha hızlı olduğunu belirleyip nedenini açıkla.

a) Başlangıçta her türden 3 bakteri vardır. Deney 1 saat = 60 dakika sürmektedir.
Escherichia coli her 20 dakikada bir bölünür. 60 dakika içinde bölünme sayısı $60 : 20 = 3$ tür. Bu, bakteri sayısının 3 kez iki katına çıktığı anlamına gelir. 1 saat sonraki bakteri sayısı:
$3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$.

Clostridium perfringens her 10 dakikada bir bölünür. 60 dakika içinde bölünme sayısı $60 : 10 = 6$'dır. Bu, bakteri sayısının 6 kez iki katına çıktığı anlamına gelir. 1 saat sonraki bakteri sayısı: $3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192$.

1 saat sonra 24 Escherichia coli ve 192 Clostridium perfringens olacaktır.

b) Escherichia coli için, bakteri sayısının zamana bağlı üstel fonksiyonu: $y_1 = 3 \cdot 2^{\frac{x}{20}}$ burada $y_1(x)$, x dakikadan sonraki bakteri sayısını ifade eder.

c) Clostridium perfringens için, bakteri sayısının zamana bağlı üstel fonksiyonu: $y_2 = 3 \cdot 2^{\frac{x}{10}}$ burada $y_2(x)$, x dakikadan sonraki bakteri sayısını ifade eder.

ç) Escherichia coli için zamanla bakteri sayısının değerler tablosu:

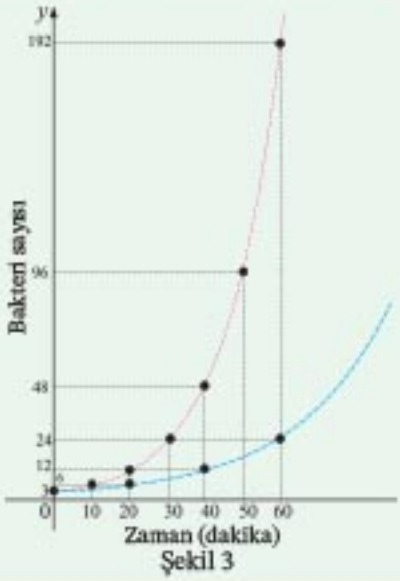
Zaman (dakika)	0	20	40	60
Bakteri sayısı	3	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 2^2 = 12$	$3 \cdot 2^3 = 24$

Clostridium perfringens için, zamana bağlı bakteri sayısının değerler tablosu:

Zaman (dakika)	0	10	20	30	40	50	60
Bakteri sayısı	3	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 2^2 = 12$	$3 \cdot 2^3 = 24$	$3 \cdot 2^4 = 48$	$3 \cdot 2^5 = 96$	$3 \cdot 2^6 = 192$

Çizim 3'te, mavi renkteki grafik bakterinin Escherichia coli için üstel büyümesini, kırmızı renkteki grafik ise bakterinin Clostridium perfringens için üstel büyümesini göstermektedir.

Clostridium perfringens için olan fonksiyon daha hızlı üstel büyümeye sahiptir, çünkü bakteri daha sık bölünmektedir.



Şekil 3

SORU 2

Andra, "fil dişi diş macunu" adlı bir kimyasal deney yapmaktadır. Macunun hacmi her saniye iki katına çıkmaktadır.

a) Başlangıç hacmi 1024 mm^3 ise, 1 saniye sonra hacim ne kadar olur?

b) 6 saniye sonra hacim ne kadar olur?

c) Macunun hacmi zamana (saniye cinsinden) bağlı olarak nasıl değişir? Fonksiyonu yaz ve grafiğini çiz.

ETKİNLİK

Eli'nin büyükannesi onun on sekizinci doğum günü için bir pasta yapmıştır. Eli pastayı çok beğendiği için ilk gün pastanın yarısını yemiştir. Büyükannesi ona, aynı hızda yemeye devam ederse birkaç gün içinde pastayı bitireceğini söylemiştir. Fakat Eli akıllıca bir plan yapar: Her zaman bir önceki günden kalan pastanın yarısını yiyecektir. Böylece her gün pasta yemeye devam edip pastayı asla tamamen bitirmeyeceğini düşünür.

İlk günün sonunda Eli'nin elinde pastanın $\frac{1}{2}$'si kalır.

İkinci günün sonunda $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ kadar kalır.

Üçüncü günün sonunda $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ kadar kalır, vb.

a) Beşinci günün sonunda pastanın ne kadarı kalır?

b) Eli pastayı gerçekten hiç bitiremeyecek mi?

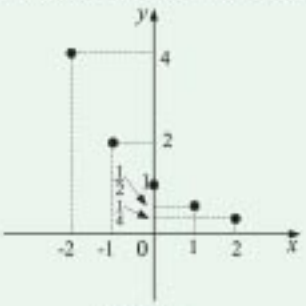
ÖRNEK 6

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonun grafiğini çiz.

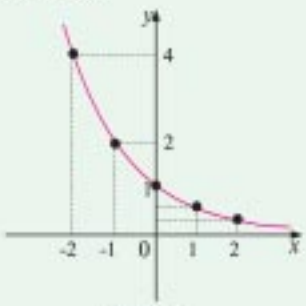
Fonksiyonun grafiğinden birkaç nokta buluyoruz:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

Elde edilen noktaları seçilen koordinat sistemine yerleştiriyoruz (şekil 4). Bu noktaları kesintisiz çizgiyle birleştirerek, fonksiyonun grafiğini elde ediyoruz (şekil 5).



Şekil 4



Şekil 5

Fonksiyonun tanım kümesi D, gerçek sayıların kümesidir, yani $D = \mathbb{R}$, değer kümesi V ise tüm pozitif gerçek sayılardan oluşur, yani $V_f = \mathbb{R}^+$.

Fonksiyon **üstel olarak azalır** (fonksiyon üstel ve monoton olarak azalır), çünkü $x_1 < x_2$ olduğunda $2^{x_1} > 2^{x_2}$ sonucu çıkar.
Fonksiyonun grafiği (0, 1) noktasından geçer.
x değerleri sınırsızca arttığında, fonksiyonun karşılık gelen değerleri pozitif kalır, azalır ve asla sıfır değerine ulaşmaz. Bu, fonksiyonun grafiğinin x-eksenine yaklaşacağı, fakat hiçbir zaman onu kesmeyeceği veya ona dokunmayacağı anlamına gelir. Demek ki x-eksenı $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun **asimptotu**dur.

SORU 3

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ üstel fonksiyonun grafiğini çiz.

Üstel azalmanın tam olarak anlamı nedir?

Üstel azalma, başlangıçtaki miktarın zamanla sabit bir çarpan oranında, eşit zaman aralıklarında azalmasıdır.

Zaman içerisinde üstel azalma gösteren süreçler genellikle şu biçimdeki üstel fonksiyonla modellenir:
$y = M\,a^x$, $0 < a < 1$ ve $a \neq 1$, $M > 0$.

Bu durumda da, fonksiyon belirli koşullar altında incelendiğinde, tanım kümesi ve değer kümesi $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinin gerçek bir alt kümesi olabilir.

ÖRNEK 7

Radyoaktif A maddesinin yarı ömrü 20 dakikadır. Bu, her 20 dakikada bir bozunan maddenin kütlesinin yarısının kaldığı anlamına gelir. Radyoaktif B maddesinin yarı ömrü 30 dakikadır. Her bir maddenin başlangıç kütlesi 16 gramdır.

a) 1 saat sonra her bir maddeden kaç gram kalacak?

b) A maddesinin bozunma sürecini modelleyen fonksiyonu yaz.

c) B maddesinin bozunma sürecini modelleyen fonksiyonu yaz.

d) Her iki fonksiyonu aynı koordinat sisteminde çiz, sonra hangi fonksiyonun daha hızlı üstel azalma gösterdiğini belirle ve nedenini açıkla.

a) Başlangıçta her bir madde türünden 16 gram vardır. Süreç 1 saat = 60 dakikadır. A maddesinin kütlesi 20 dakikada bir yarıya iner. 1 saatlik süre için 60: 20 = 3 kez yarıya iner.

A maddesinin kütlesi 1 saat sonra $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$ gram olacaktır. B maddesinin kütlesi 30 dakikada bir yarıya iner. 1 saatlik süre için 60: 30 = 2 kez yarıya düşer.

B maddesinin kütlesi 1 saat sonra $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$ gram olacaktır. 1 saat sonra A maddesinden 2 gram ve B maddesinden 4 gram kalır.

b) A maddesinin bozunma sürecini modelleyen üstel fonksiyon: $y_1 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{20}}$ burada $y_1(x)$, x dakika sonra gram cinsinden madde miktarıdır.

c) B maddesinin bozunma sürecini modelleyen üstel fonksiyon: $y_2 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$ burada $y_2(x)$, x dakika sonra gram cinsinden madde miktarıdır.

d) Zamanla A maddesinin miktarı için değer tablosu:

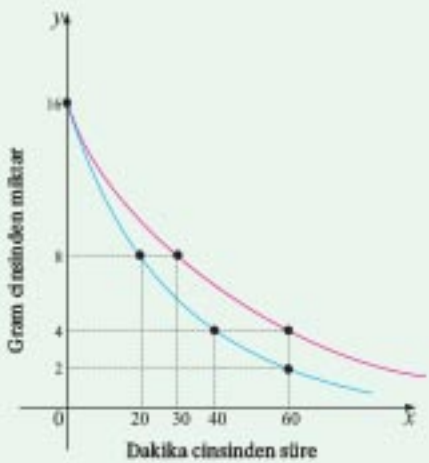
Dakika cinsinden süre	0	20	40	60
Gram cinsinden miktar	16	$16\left(\frac{1}{2}\right) = 8$	$16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$	$16\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$

Zamanla B maddesinin miktarı için değer tablosu:

Dakika cinsinden süre	0	30	60
Gram cinsinden miktar	16	$16\left(\frac{1}{2}\right) = 8$	$16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$

Şekil 6'da mavi renkli grafik A maddesinin kütlesinin üstel azalmasını, kırmızı renkli grafik ise B maddesinin kütlesinin üstel azalmasını gösterir.

Daha hızlı üstel azalma A maddesinde vardır, çünkü onun yarı ömrü daha kısadır.



Şekil 6

SORU 4

Antibiyotik 200 miligramlık bir dozda organizmaya alınır. Vücut, ilacın yarısını her 6 saatte bir parçalar. Aşağıda verilen saatlerden sonra antibiyotik kaç miligram olarak kalacaktır?

a) 6 saat b) 12 saat c) 18 saat

Antibiyotiğin zamana göre parçalanma sürecini modelleyen fonksiyonu yaz ve onun grafiğini çiz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Fonksiyonların özelliklerini belirt:

   a) $y = 6^x$ b) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ c) $y = 12 \cdot 4^x$ d) $y = 9\left(\frac{1}{9}\right)^x$

2. Fonksiyonların grafiğini çiz, sonra fonksiyonun üstel olarak artıp artmadığını ya da üstel olarak azalıp azalmadığını belirle:

   a) $y = 4^x$ b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ c) $y = 2 \cdot 5^x$ d) $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$

3. Mitoz sürecinde bir hücreden iki özdeş kopya elde edilir. Bir bakteri her 5 saniyede mitoz yoluyla çoğalır.

   a) Mitoz bir hücre ile başlarsa, 5 saniye sonra kaç hücre olacaktır?

   b) 15 saniye sonra kaç hücre, bir dakika sonra kaç hücre olacaktır?

   c) $5x$ saniye sonra bakteri sayısını gösterecek fonksiyonu yaz.

   d) İlk 30 saniye için fonksiyonun grafiğini çiz.

4. RNA yapısı, 4 temel RNA bazı olan Adenin, Sitozin, Guanin ve Urasil'in birleşimiyle oluşur.

   a) Bir temel RNA bazı kaç şekilde oluşturulabilir?

   b) İki temel RNA bazının bir kombinasyonu kaç şekilde oluşturulabilir?

   c) n RNA bazının kaç şekilde oluşturulabileceğini hesaplayan fonksiyonu yaz.

5. Bir laboratuvar deneyi, 10^6 stafilokok bakteriden oluşan bir koloninin 2 saatlik bir süre boyunca çoğalmaya bırakılmasından oluşur. 2 saatten sonra penisilin uygulanır ve bakterilerin yok edilmesi başlar. Bakteri sayısı her 40 dakikada 4 kat artar ve penisilin her 20 dakikada bakterilerin yarısını yok eder.

   a) Deney 6 saat sürerse, zamana bağlı olarak 10^6 bakteri cinsinden ifade edilen bakteri sayısını gösterecek grafiği çiz.

   b) Deneyin sonunda bakteri sayısı ne olacaktır?

6. Yüksek enflasyonlu bir ülkede, banka birikim mevduatına yıllık %100 faiz verir ve birikim mevduatının tam yıl sayılarından sonra çekilmesine izin verir. 1, 2, 3, 4, 5 yıl sonra birikim mevduatı tutarını veren fonksiyon için değerler tablosunu oluştur, sonra onun grafiğini çiz.

7. 2020 yılında balık popülasyonu 16 777 216 bireydir. Hayvan popülasyonu ekolojik olarak kirlenmiş bir ortamda yaşar ve her yıl %75 oranında azalır. 2030 yılında hayvan popülasyonu ne kadar olacaktır?

8. Nenad'ın bakteriyel bir enfeksiyonu vardır. Doktora gittiğinde, bakteri nüfüsünü 2 milyondu. Doktor ona, bakteri popülasyonunu her gün büyüklüğünün $\frac{1}{4}$'ine indiren bir antibiyotik reçete yazdı.
   a) İlacın ilk alınmasından 10 gün sonra bakteri nüfüsünün büyüklüğünü bul.
   b) İlacın ilk alınmasından 14 gün sonra bakteri nüfüsünün büyüklüğünü bul.
   v) Nüfüsün büyüklüğünü modelleyen fonksiyonu yaz.
   g) Nüfüsün büyüklüğünün gün cinsinden zamana bağlı olarak 10^6 bakteri cinsinden ifade edildiği grafiğini çiz.

ARAŞTIRMA

a) $y = 3^x$ ve $y = 4^x$ üstel fonksiyonlarını aynı koordinat sisteminde çiz. Üs tabanlarına bağlı olarak her iki fonksiyonun üstel büyüme hızları arasındaki ilişkiyi belirle.

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ve $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ üstel fonksiyonlarını aynı koordinat sisteminde çiz. Üs tabanlarına bağlı olarak her iki fonksiyonun azalma hızı arasındaki ilişkiyi belirle.

c) $y = a^x$ biçimindeki üstel fonksiyon için genel durumda üstel büyüme hızı ile üstel azalma hızı arasında, üs tabanı a'ya bağlı bir ilişki olup olmadığını araştır ve keşfet.

ARAŞTIRMA

a) "mili" ile "kilo" arasındaki dekadik ve ondalık çarpanların öneklerini ve değerlerini en küçükten en büyüğe yaz. Aralarındaki ilişki nedir? Çarpanların değerlerini belirleyecek bir fonksiyon belirle.

b) "kilo" ile "tera" arasındaki çarpanları en küçükten en büyüğe yaz. Aralarındaki ilişki nedir? Çarpanların değerlerini belirleyecek bir fonksiyon belirle.

c) "piko" ile "mikro" arasındaki çarpanları en küçükten en büyüğe yaz. Aralarındaki ilişki nedir? Çarpanların değerlerini belirleyecek bir fonksiyon belirle.

3.6. Tek Bilinmeyenli Denklemler ve Eşdeğer Denklemler

Denklem Türleri

ETKİNLİK

Aşağıdaki ifadelere karşılık gelen cebirsel kayıtları oku:
Adnan'ın y kitabı vardır.
Boyan'ın, Adnan'dan 5 kitap fazlası var. Boyan'ın (y + 5) kitabı vardır.

Daniel'in Adnan'dan 1 kitabı daha az var. Daniel'in (y-1) kitabı var.
Yovan'ın Adnan'dan 2 kere daha fazla kitabı var. Yovan'ın 2y kitabı var.

Onur'un Boyan'dan 3 kere daha fazla kitabı varsa, Onur'un kitap sayısını gösteren cebir ifadesi yaz.

Eğer cebirsel ifadeleri, örneğin $x + 5$ ve $2x$ ifadelerini eşitlik işaretiyle bağlarsak, bilinmeyeni x olan $x + 5 = 2x$ denklemini belirleriz; bunun tanım kümesi gerçek sayılar kümesi olabilir.

En az birinde bir veya daha fazla değişken bulunan iki cebirsel rasyonel ifade, "=" (eşittir) işaretiyle bağlandığında bir denklem belirler(oluşturur).
Denklemdeki değişkenlere bilinmeyenler deriz ve bunları $x, y, z, \ldots$ ile gösteririz.

Bilinmeyenlerin izin verilen değerlerinin kümesine denklemin **tanım kümesi** denir ve D ile gösterilir. Aksi belirtilmedikçe, tanım kümesinin, denklemin anlamlı olduğu değerlerin bütün elemanlarını içerir ve öyle kabul ederiz.

ÖRNEK 1

a) $5x + 3 = 2$ denklemi, bilinmeyeni x olan bir denklemdir ve tanım kümesi $D = \mathbb{R}$'dir.
b) $\frac{1}{y-2} = 3$ denklemi, bilinmeyeni y olan bir denklemdir ve tanım kümesi $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$'dir.

Bilinmeyen sayısına göre, denklem şu türde olabilir: **tek bilinmeyenli denklem, iki bilinmeyenli denklem** vb.
Bilinmeyenlerin en büyük üs derecesine göre, denklem şu türde olabilir: **birinci dereceden** ya da **lineer denklem, ikinci dereceden** ya da **kare denklem** vb.

ÖRNEK 2

a) $2x + 4 = 7$ denklemi, tek bilinmeyenli lineer bir denklemdir.
b) $x + y = 2x$ denklemi, iki bilinmeyenli lineer bir denklemdir.
c) $x^2 = x + y$ denklemi, iki bilinmeyenli ikinci dereceden bir denklemdir.

ÖRNEK 3

$7 - 3x = 1$ denklemi, $x = 2$ için doğru sayısal eşitlik $7 - 3 \cdot 2 = 1$'e dönüşür,
$x = 3$ için yanlış sayısal eşitlik $7 - 3 \cdot 3 = 1$'e dönüşür.

Tek bilinmeyenli bir denklemin çözümü veya kökü, tanım kümesinden, denklemin doğru sayısal eşitliğe dönüştüğü (bilinmeyenin) her değeridir.
Bir denklemin tüm çözümleri, **denklemin çözüm kümesini** oluşturur ve bunu R ile göstereceğiz.

ÖRNEK 4

a) $2 + x = 5$ denkleminin çözüm kümesinde tek çözümü vardır $x = 3$, yani $R = \{3\}$.

b) $6 + 3x = 3(2 + x)$ denklemi için çözüm kümesi $R = D = \mathbb{R}$'dir. Böyle bir durumda denklemde bir **özdeşlik** olduğunu söyleriz.

c) $7 + 3x = 2 + 3x$ denklemi için çözüm kümesi $R = \varnothing$'dür. Böyle bir durumda denklemin **imkânsız** olduğunu söyleriz.

Tek Bilinmeyenli Eşdeğer Denklemler

ETKİNLİK

$2 + x = 5$ ve $x - 3 = 0$ denklemleri için tanım kümesi ve çözüm kümesi hakkında ne sonuç çıkarabilirsin?



Aynı tanım kümesine ve aynı çözüm kümesine sahip iki denklem, **eşdeğer denklemler** olarak adlandırılır.

Verilen bir denklemi çözmek için onu, ona eşdeğer fakat daha basit bir başkasıyla değiştiririz. Sonra o denklemi de ona eşdeğer üçüncü, daha basit bir denklemle değiştiririz, vb., çözümleri açık olan bir denkleme ulaşıncaya kadar.
Bir denklemin, ona eşdeğer bir başka denklemle değiştirilmesi işlemine **eşdeğer dönüşüm** denir.

ETKİNLİK

Verilen denklemin, ona eşdeğer ve çözümü açık olan daha basit bir denklemle değiştirilmesini izle:

$x - 7 = 2$ Denklemin her iki tarafına 7 sayısını ekliyoruz.

$x - 7 + 7 = 2 + 7$ Elde edilen denklem, verilen denkleme eşdeğerdir.

$x = 9$ Denklemin çözümüne ulaştık $x_0 = 9$

–7 sayısını karşı tarafa zıt işaretle geçirirsen aynı sonuca ulaşır mısın?



Bilinmeyenin tüm olası değerleri için tanımlanmış olan denklemin her iki tarafına aynı ifadeyi eklersek, verilen denkleme eşdeğer bir denklem elde ederiz.
Bunun sonucu olarak:

- Denklemin iki tarafında aynı işaretli eşit terimler varsa, bunlar sadeleştirilebilir (çıkarılabilir).
- Denklemin herhangi bir terimi bir taraftan diğer tarafa taşınabilir ve bu sırada işareti zıddına dönüşür.

ÖRNEK 5

Denklemin eşdeğer dönüşümlerini takip edin:

a) $7x - 3x + 2 = 9 - 3x$ Eşit üyeleri iptal ediyoruz: $-3x$ ve $-3x$.

$7x + 2 = 9$ Elde edilen denklem verilen denkleme eşdeğerdir.

b) $5x - 4 = 2x + 5$ $2x$ terimini denklemin sol tarafına taşıyoruz, işareti zıddına dönüşecektir.

$5x - 2x - 4 = 5$ -4 terimini denklemin sağ tarafına taşıyoruz, işareti zıddına dönüşecektir.

$5x - 2x = 5 + 4$ Elde edilen denklem, verilen denkleme eşdeğer denklemdir.



Bir denklemin her iki tarafını, bilinmeyenin tüm olası değerleri için tanımlanmış ve sıfırdan farklı aynı ifadeyle çarparsak, verilen denkleme eşdeğer bir denklem elde ederiz. Bunun sonucu olarak:

- Denklemin tüm terimlerinin işaretleri, denklemin her iki tarafı -1 ile çarpılırsa zıtlarına dönüşür.
- Denklemin her iki tarafında, bilinmeyeni içermeyen ve sıfırdan farklı ortak bir çarpan varsa, her iki taraf bu çarpana bölünebilir. Bu durumda **denklemin kısaltıldığını** söyleriz.

ÖRNEK 6

Denklemin eşdeğer dönüşümlerini izle:

a) $-3x + 7 = 3$ Denlemin her iki tarafını -1 sayısıyla çarpıyoruz.

$3x - 7 = -3$ Elde edilen denklem, verilen denkleme eşdeğerdir.

b) $2x - 4 = 6$ Denklemi kısaltıyoruz.

$x + 2 = 4$ Elde edilen denklem, verilen denkleme eşdeğerdir.

Şunu not edelim ki, yukarıdaki özelliğin uygulanmasıyla, kesirli katsayılı bir denklem, denklemin her iki tarafı paydaların ortak bir katı ile çarpılırsa tam katsayılı bir denkleme dönüştürülebilir. Bu dönüşüme **denklemin paydalardan kurtarılması** denir.

ÖRNEK 7

$\frac{x-1}{2} - 5 = \frac{x+2}{3}$ denklemini paydalardan kurtar:

$\frac{x-1}{2} - 5 = \frac{x+2}{3}$ Her bir terim paydaların EKOK'u ile çarpılır: EKOK(2, 3) = 6

$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot 5 = 6 \cdot \frac{x+2}{3}$ paydalardan kurtulmak için.

$3(x-1) - 30 = 2(x+2)$ Elde edilen denklem, verilen denkleme eşdeğer denklemdir.

SORU 1

$\frac{5(x+2)}{6} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{3(x-2)}{2}$ denklemi paydalardan kurtar.

SORU 2

Otomobil sabit bir hızla hareket eder. Zaman ölçümüne öğle vakti başlarsak, x saat sonra otomobil $60x + 20$ kilometre kat eder. Öğleden sonra saat kaçta otomobil 200 kilometre kat edecektir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki denklemler eşdeğer midir:
   a) $7x + 3x = 12 + 7x$ ve $3x = 12$ b) $3 = \frac{15}{x}$ ve $3x = 15$ c) $x + \frac{1}{x} = 5 + \frac{1}{x}$ ve $x = 5$?
2. x'in hangi değeri için $5x - 2$ ifadesinin sayısal değeri eşittir:
   a) 8 b) 7 c) 0 d) 6?
3. x'in hangi değeri için $3x - 2$ ve $4x + 1$ ifadeleri eşit sayısal değerlere sahiptir?
4. Birkaç eşdeğer dönüşüm uygulayarak, denklemi çöz:
   a) $14 - 3x = 8 - 6x$ b) $2(3x - 1) = 22$ c) $\frac{6-5x}{3} + \frac{2x-1}{4} = \frac{x-4}{6}$
5. Aşağıdaki denklemlerden hangileri özdeşliktir:
   a) $5x - 2x = 3x$ b) $\frac{4x+4}{16} = \frac{x+1}{2}$ c) $\frac{x-1}{15} + \frac{2x}{5} = \frac{3x-4}{3}$
6. Aşağıdaki denklemlerden hangileri imkânsız denklemlerdir:
   a) $7x - x = 6x + 3$ b) $2(x - 3) + 2 = x + 6$ c) $\frac{2x-1}{2} = \frac{3x+2}{3}$
7. Telefon bataryası (pili) sabit bir hızla şarj edilir. x dakika sonra telefon $2x + 10\%$ doludur. Batarya %70 doluysa, kaç dakika şarj edilmiştir?
8. Kimyasal çözelti doğrusal olarak soğur. Onun sıcaklığı x dakika sonra $100 - 4x$ Santigrat derecedir. 60°C sıcaklığına ulaşan çözelti kaç dakika soğutulmuştur?

3.7. Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlerin Ve Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlere İndirgenen Denklemlerin Çözümü

Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlerin Çözümü

ETKİNLİK

$7x + 4 = 8 + 5x$ denklemi üzerinde eşdeğer dönüşümler uygulayarak tüm terimleri sol tarafa taşı ve sadeştir. Elde edilen denklemin biçimini açıkla.

Uygun seçilmiş temel dönüşümlerle bir bilinmeyenli her lineer denklem,

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

türündeki lineer bir denkleme indirgenir; burada a ve b, bilinmeyen x'in bulunmadığı sayılar veya ifadelerdir. (1) denklemi, **bir bilinmeyenli lineer denklemin genel türü** olarak adlandırılır; a, bilinmeyenin **katsayısı**, b ise **serbest terim** olarak adlandırılır.

ETKİNLİK

Lineer denklemin çözüm kümesini bul: a) $2x + 4 = 0$ b) $0 \cdot x = 2$ c) $0 \cdot x = 0$.

Lineer denklemin (1) çözüm kümesini inceleyelim:

1°. $ax + b = 0, a \neq 0$
$x = -\frac{b}{a}$

b'yi denklemin sağ tarafına geçiririz, sonra a'ya böleriz.
Elde edilen denklem verilen denkleme eşdeğerdir.
Onun tek çözümü $x_0 = -\frac{b}{a}$'dır.

2°. $ax + b = 0, a = 0$ ve $b \neq 0$

$0x = -b$

b'yi denklemin sağ tarafına geçiririz, sonra $a = 0$ koyarız.
Elde edilen denklem verilen denkleme eşdeğerdir.
O imkânsızdır, çünkü sıfırla çarpıldığında sıfırdan farklı bir sayı veren bir gerçek sayı yoktur.

3°. $ax + b = 0, a = 0$ ve $b = 0$
$0 \cdot x = 0$

$a = 0$ ve $b = 0$ koyarız.
Elde edilen denklem verilen denkleme eşdeğerdir.
Onun **sonsuz sayıda çözümü** vardır, çünkü her gerçek sayı sıfırla çarpıldığında sıfır verir.

ÖRNEK 1

$\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2$ denklemi çöz:

$\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2$ — Paydalardan kurtulmak için denklemin her iki tarafını EKOK(3, 4, 2) = 12 ile çarparız.

$12 \cdot \frac{5x-2}{3} - 12 \cdot \frac{x-8}{4} = 12 \cdot \frac{x+14}{2} - 12 \cdot 2$ — Paydalardan kurtuluyoruz,

$4(5x - 2) - 3(x - 8) = 6(x + 14) - 12 \cdot 2$ — Parantezlerden kurtuluyoruz.

$20x - 8 - 3x + 24 = 6x + 84 - 24$ — Bilinmeyeni içeren tüm terimleri sol tarafa, tüm serbest terimleri sağ tarafa topluyoruz.

$20x - 3x - 6x = 84 - 24 + 8 - 24$

$11x = 44$ — Denklemi 11 sayısıyla sadeleştiriyoruz.

$x = 4$ — Denklemin çözümü $x_0 = 4$'tür.

Eğer denklem bilinmeyeni paydada içeriyorsa, paydalardan kurtarıldıktan sonra elde edilen denklem, verilen denklemin tüm çözümlerini içerebileceği gibi, paydaların EKOK'unu sıfırlayan değerler için ek çözümler de kazanabilir.

Böyle çözümler varsa, bunlar çözüm kümesinden çıkarılmalıdır.

ÖRNEK 2

$\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-2} = 1$ denklemini çöz:

$\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-2} = 1$ — Paydalardan kurtulmak için denklemin her iki tarafını çarpan $x(x-2)$, $x \neq 0$ ve $x \neq 2$ ile çarparız;

$\frac{15x(x-2)}{x} - \frac{(7-x)\cdot x\cdot(x-2)}{x-2} = x(x-2)$ Paydalardan kurtuluyoruz,

$15(x-2) - x(7-x) = x(x-2)$ — Parantezlerden kurtuluyoruz.

$15x - 30 - 7x + x^2 = x^2 - 2x$ — Bilinmeyenli ve bilinmeyensiz terimleri grupluyor ve benzer terimleri topluyoruz.

$10x = 30$ — Her iki tarafı 10 sayısına böleriz.

$x = 3$ — Denklemin çözümü $x_0 = 3$'tür.

ÖRNEK 3

$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$ denklemini çöz.

$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$ — Denklemin her iki tarafını $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, $x \neq -2$ ve $x \neq 2$, ifadesiyle çarparız.

$(x-2) - (x+2) = 2x$ — Bilinmeyenli ve bilinmeyensiz terimleri grupluyor ve benzer terimleri topluyoruz.

$2x = -4$ — $x_0 = -2$ denklemin çözümü değildir.

$x = -2$ — Denklemin çözüm kümesi $R = \emptyset$, dolayısıyla denklem imkânsızdır.

ÖRNEK 4

$\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}$ denklemini çöz.

$\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}$ — Denklemin her iki tarafını $x - 5$ ifadesiyle çarparız, $x \neq 5$.

$2x - 7 = x - 5 - (2 - x)$ — Bilinmeyenli ve bilinen terimleri grupluyor ve benzer terimleri topluyoruz.

$0 \cdot x = 0$ — Denklemin çözümleri, $x \neq 5$ olmak üzere tüm gerçek sayılardır. $R = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ olarak yazarız.

SORU 1

Başlangıç denklemine doğru çözümü elde etmek için denklemleri doğru sırayla düzenle. Bazı denklemler doğru değildir. Yanlış denklemlere ulaşmak için çözümde yapılan hataları ortaya çıkar.

$2x = 3$ $x = 1{,}5$	$2x = -15$ $x = 6$	$3(5x - 3) = 13x - 6$ $15x - 9 = 13x - 6$	$15x - 6 = 13x - 6$ $2x - 9 = -6$

SORU 2

Sabit akım şiddetiyle suyun elektrolizi sırasında, t saat sonra açığa çıkan hidrojen miktarı $\frac{t}{2}$ litredir. Hacmi 1,5 litre olan bir balon kaç saatte dolar?

Parametreli Lineer Denklem

Bir bilinmeyenli lineer denklemde parametre, belirli bir tayin edilmiş kümede "değeri değişebilen sabit" anlamına gelir. Parametrenin tayin edilmiş kümede değişmesi, denklemin çözüm kümesine doğrudan etki eder.

ÖRNEK 5

$ax - 2 = x$, denkleminde a gerçek bir parametredir, denklemi çöz.

$ax - 2 = x$	Bilinmeyenli ve bilinmeyensiz terimleri gruplar ve benzer terimleri toplarız.
$ax - x = 2$	Ortak çarpanı parantez önüne çıkarırız.
$(a - 1)x = 2$	Parametre a'nın değerlerini değerlendirmeye başlarız:

- Eğer $a - 1 = 0$, yani $a = 1$ ise, denklem $0 \cdot x = 2$ biçimini alır. Bu durumda denklem imkânsızdır ve çözüm kümesi $R = \emptyset$'dir.
- Eğer $a - 1 \neq 0$, yani $a \neq 1$ ise, o zaman denklemin tek çözümü $x_0 = \frac{2}{a-1}$.

Bir bilinmeyenli lineer denklem birden fazla parametre de içerebilir. Bu durumda, denklemin çözüm kümesine ilişkin tartışma her bir parametre için ayrı ayrı ve aralarındaki olası ilişkiler dikkate alınarak yürütülür.

ÖRNEK 6

a ve b'nin gerçek parametrelerden olduğu $\frac{x}{a+b} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b}$ denklemi çöz.

Çözmeye başlamadan önce, denklemin anlamı olmadığı parametre değerlerini belirlemeliyiz.
Bu durumda 0'a bölme yasaktır; buna göre $b \neq 0$ ve $a \neq -b$ olmalıdır.
Denklemi $b \neq 0$ ve $a \neq -b$ koşulu altında çözdüğümüzü söyleriz.

$\frac{x}{a+b} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b}$	denklemin her iki tarafını $b(a + b)$ ifadesiyle çarparız
$\frac{b(a+b)x}{a+b} + \frac{b(a+b)x}{b} = \frac{b(a+b)b}{a+b}$	paydalardan kurtulmak için.
$bx + (a + b)x = b^2$	Ortak çarpanı parantez önüne çıkarırız.

$(a+2b)x = b^2$ a ve b'nin parametrelerin değerlerini değerlendirmeye (tartışmaya) başlarız.

- Eğer $a+2b=0$, yani $a=-2b$ ise, denklem $0\cdot x = b^2$ biçimini alır.
  Bu durumda denklem imkânsızdır ve çözüm kümesi $R=\emptyset$'dir.
- Eğer $a+2b\neq 0$, yani $a\neq -2b$ ise, o zaman denklemin tek çözümü $x_0=\frac{b^2}{a-2b}$'dir.

SORU 3

a parametre'sinin hangi değeri için denklem:

a) $5x+a=2$ çözümü $x_0=0$'dır b) $5a-2x=3$ çözümü $x_0=1$'dir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Verilen denklemleri çöz:
   a) $(x-1)(x-2)-(x-3)(x-4)=6$ b) $3x^2-(3x+2)(x-1)=8$ c) $t(t-3)+4=t^2-2(t+4)$

2. Verilen denklemleri çöz:
   a) $x-\frac{2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{9-2x}{3}$ b) $\frac{y+17}{5}+2=\frac{3y-7}{4}$ c) $\frac{14x-1}{15}+\frac{2x-3}{5}=\frac{3x-4}{3}$

3. Verilen denklemleri çöz:
   a) $1+\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}$ b) $x+\frac{1+\frac{3x}{2}}{4}+\frac{2+\frac{x}{4}}{3}=2$

4. Verilen denklemleri çöz:
   a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=3$ b) $\frac{5}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$ c) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=2-\frac{x}{x^2-1}$

5. Verilen denklemleri çöz:
   a) $\frac{2}{2x-3}+\frac{2x-3}{x}=2$ b) $\frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{y^2-9}$ c) $\frac{2}{x}+\frac{x+2}{x(x-2)}=\frac{4}{x(x-2)}$

6. Parametreli denklemi çöz:
   a) $(x+k)^2=x(x+k)+5k^2$ b) $n(1+y)=m(1-y)$ c) $\frac{x-a}{x-1}+\frac{x-1}{x-a}=2$

7. Parametre a'nın hangi değeri için denklem
   a) $ax-6=a+2(x-4)$ tek çözüme sahiptir b) $x-2ax=2a+5$ imkânsızdır?

8. Laboratuvarda üretilen etin miktarı t saniye sonra $\frac{10+6t}{7}$ gramdır. 100 gramlık küçük bir köfte oluşturmak için ne kadar süre gereklidir?

9. x küçük ağırlık yerleştirilerek yapılan bir mekanik yayın uzaması $\frac{62+4x}{3}$ milimetredir. Yayın 110 milimetreye kadar uzaması için gerekli ağırlık sayısını belirle.

3.8. Tek Bilinmeyenli Lineer Denklemlerin Oluşturulması ve Çözülmesi

ETKİNLİK

Bir fabrika 86 vida siparişi almıştır. Bunları üç kutuya şu şekilde paketlemelidir:

Birinci kutuda x vida olsun.
İkinci kutuda x + 6 vida olsun.
Üçüncü kutuda 2x vida olsun.

Her bir kutudaki vida sayısını bulabilmen için bir denklem kur.

Doğa ve sosyal bilimlerdeki birçok problemin çözümü, ayrıca günlük yaşantımızdaki problemler, tek bilinmeyenli lineer denklemlerin oluşturulmasına ve çözülmesine indirgenir. Bu süreçte, problemin çözümünün en ciddi kısmı, onun uygun bir cebirsel biçime çevrilmesidir. Her ne kadar bu tür görevlerin çözümü için kesin belirlenmiş kurallar olmasa da, yine de ortaya konulan problemin çözümüne kademeli olarak ulaşmak üzere birkaç adım ayırt edilebilir.

ÖRNEK 1

İki sayının toplamı 94'tür. Büyük sayı, küçük sayının iki katından 5 daha küçüktür.
Bu sayılar hangileridir?

1. Soruyu ayırırız: İki sayı hangileridir?
2. Bilinmeyen büyüklükleri gösteririz: küçük sayı x, büyük sayı $94 - x$'tir.
3. Cebirsel ilişkiyi belirleriz: büyük sayı, küçük sayının iki katından 5 daha küçüktür.
4. Denklemi kurarız: $94 - x = 2x - 5$.
5. Denklemi çözeriz:

$$94 - x = 2x - 5$$
$$94 + 5 = 2x + x$$
$$99 = 3x$$
$$x = 33$$

Denklemin çözümü $x_0 = 33$'tür.

Küçük sayı 33, büyük sayı $94 - 33 = 61$'dir.

6. Sonucun kontrolünü yaparız: $33 + 61 = 94$ ve $94 - 33 = 2 \cdot 33 - 5$.

Kontrolün gerekli olduğunu belirtelim; çünkü denklem doğru kurulmuş ve çözülmüş olsa da, elde edilen çözümler için alıştırmanın anlamı olmayabilir.

ÖRNEK 2

Yana, kardeşinden 7 yaş büyüktür. 5 yıl sonra yaşlarının toplamı 63 olacaktır. Her biri kaç yaşındadır?

1. Soru: Yana ve kardeşi kaç yaşındadır?
2. Bilinmeyen büyüklükler: Yana'nın yaşı x; kardeşinin yaşı: x – 7'dir.

3. Cebirsel ilişkiye ulaşmak için, alıştırmada verilen koşulları tablo ile gösteririz

Büyüklükler	Yana	Yana'nın kardeşi
Yaş	x	$x-7$
5 yıl sonraki yaş	$x+5$	$(x-7)+5$

Yana'nın 5 yıl sonraki yaşı ile kardeşinin 5 yıl sonraki yaşının toplamı 63'tür.

4. Denklemi kurarız: $(x+5)+(x-7)+5=63$.
5. Denklemi çözeriz $(x+5)+(x-7)+5=63$:

$(x+5)+(x-7)+5=63$

$2x+3=63$

$x=30$ Yana şu anda 30 yaşındadır, kardeşi ise $30-7=23$ yaşındadır.

6. Sonucun kontrolü: $(30+5)+(23+5)=63$.

ÖRNEK 3

Petar'ın elinde 50, 100 ve 500 denarlık banknotlardan toplam 6500 denar vardır. Her türden eşit sayıda banknotu vardır. Her türden kaç banknotu vardır?

Petar'ın her türden x banknotu vardır. Alıştırmada verilen koşulları tablo ile göstereceğiz.

Büyüklükler	50 denarlık banknotlar	100 denarlık banknotlar	500 denarlık banknotlar
banknot sayısı	x	x	x
denar cinsinden değer	50	100	500
toplam denar değeri	$50x$	$100x$	$500x$

Petar'ın sahip olduğu toplam para 6500 denar olduğundan, $50x+100x+500x=6\,500$ denklemini kurabiliriz; bunun çözümü $x_0=10$'dur. Buna göre, Petar'ın her türden 10 banknotu vardır.

Kontrol: $50\cdot 10+100\cdot 10+500\cdot 10=6\,500$

Belirtelim ki, çözüm ancak banknot sayısı x doğal sayı ise anlamlıdır.

ÖRNEK 4

Bir süpermarkette gıda ürünlerinin fiyatları %40 oranında düşmüştür. Bir ürünün fiyatı 180 denarsa, indirim ilanından önceki fiyatını bul.

İndirim ilanından önce ürünün fiyatı x denar olsun. Ürünün fiyatı %40 azaldıysa, ürünün fiyatı $0{,}4x$ denar azalmıştır. Ürünün fiyatı şimdi 180 denar olduğundan, şu denkleme ulaşırız:

$x-0{,}4x=180$

bunun çözümü $x_0=300$'dür.

Ürünün indirim ilanından önceki fiyatı 300 denardır.

Kontrol (sağlama): $300-0{,}4\ 300=180$.

ÖRNEK 5

Dikdörtgen bir bahçenin çevrilmesi için 130 metre tel gereklidir. Bahçenin uzunluğu genişliğinden 5 metre fazladır. Bahçenin boyutlarını bul.

Bahçenin genişliği x metre olsun. O hâlde uzunluğu $x + 5$ metredir. Bahçenin çevrilmesi için 130 metre tel gerektiğini bildiğimize göre,

$2x + 2(x + 5) = 130$

denklemini kurabiliriz; bunun çözümü $x_0 = 30$'dur.

Bahçe 30 metre genişliğinde ve 35 metre uzunluğundadır.

Kontrol: $2 \cdot 30 + 2(30 + 5) = 130$.

ÖRNEK 6

Bir havuz iki boruyla 6 saatte dolar. Birinci boru havuzu 10 saatte doldurur. İkinci boru havuzu kaç saatte doldurur?

Birinci boru havuzu 10 saatte doldurur, bu da bir saatte havuzun $\frac{1}{10}$'ini doldurduğu anlamına gelir.

İkinci boru havuzu x saatte doldurur, bu da bir saatte havuzun $\frac{1}{x}$'ini doldurduğu anlamına gelir.

İki boru birlikte havuzu 6 saatte doldurur, bu da bir saatte havuzun $\frac{1}{6}$'ini doldurdukları anlamına gelir.

İki borunun bir saatte doldurduğu havuz kısmı, havuzu birlikte ya da ayrı doldurmalarından bağımsız olarak aynı kaldığından, $\frac{1}{10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ denklemini kurabiliriz; bu denklem $x \neq 0$ için $3x + 30 = 5x$ denklemine eşdeğerdir ve bunun çözümü $x_0 = 15$'tir.

İkinci boru havuzu 15 saatte doldurur.

Kontrol: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$.

ÖRNEK 7

Robot, saniyede v metre sabit hızla hareket edecek şekilde programlanmıştır. t saniyelik sürede toplam d metre yol almıştır.

v'yi parametre olarak kullanarak, d'yi zaman t cinsinden ifade edecek lineer denklemi yaz.

Eğer robot $v = 1{,}5$ metre/saniye hızla hareket ederse, 120 metreyi kat etmek için ne kadar zamana ihtiyaç olacaktır?

Fizikten bilirsin ki

$d = v \cdot t$ d uzaklık (metre cinsinden)

v hız (parametre, metre/saniye cinsinden)

t zaman (saniye cinsinden)

Verilen değerleri $v = 1{,}5$ metre/saniye ve $d = 120$ metre olarak denkleme yerleştirdiğimizde,

$120\,\text{m} = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ olur; bu da zamanın $t = 80$ saniye olduğu anlamına gelir.

Robotun 1,5 m/s hızla 120 metreyi kat etmesi için 80 saniyeye ihtiyacı olacaktır.

SORU 1

Günde 4500 Wh (vat-saat) elektrik enerjisi tüketen bir ev için bir güneş enerjisi sistemi kurulması gereklidir. Her biri 250 Wh elektrik enerjisi üreten güneş panelleri mevcuttur ve güneş günde 6 saat parlamaktadır. Gerekli günlük enerjinin karşılanması için kaç güneş paneli gerekir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Ador'un annesi, Ador'dan 3 kat daha yaşlıdır. 14 yıl sonra o, ondan 2 kat daha yaşlı olacaktır. Her biri kaç yaşındadır?

2. Bir şirket, iki veri saklama merkezine yeni sunucu bilgisayarlar teslim etmektedir. Sunucu bilgisayarların toplam sayısı 72'dir. İkinci veri saklama merkezi, birinci veri saklama merkezinden iki kat daha fazla bilgisayar alacaktır. Her veri saklama merkezi kaç sunucu bilgisayar alacaktır?

3. Şekil 1'deki yeşil ve beyaz dikdörtgenlerin alanlarını hesapla; yeşil boyalı kısmın alanı 28 santimetrekaredir. Şekil 1 üzerindeki ölçüler santimetre cinsindedir.



Şekil 1

4. Agim dedenin elma bahçesi 1 200 metrekaredir. Onu doludan korumak için torunu Ardiyan ona koruyucu bir ağ satın almaya karar vermiştir. Ağ, genişliği 5 metre olan dikdörtgen biçimindeyse, Agim dedenin tüm elma bahçesini korumak için Ardiyan ne uzunlukta koruyucu ağ satın almalıdır?

5. 10 litre %40 alkol, 5 litre %53 alkol ile karıştırılmıştır. Karışımın alkol yüzdesi kaçtır?

6. Bir bisikletli, bir yayanın aynı sürede kat ettiği 10 kilometrelik yola karşılık 18 kilometre yol katetmiştir. Bisikletli, yayaya göre saatte 9,6 kilometre daha büyük bir hızla hareket etmişse, her biri hangi hızla hareket etmiştir?

7. Elektrik enerjisi üretimi için REK Bitola, 1 kilogram kömür kullanarak 0,6 kilovat-saat elektrik enerjisi üretir. Jana, inverter klima cihazının sıcaklığı bir Santigrat derece artırması için 2 saat çalışmasının gerektiğini gözlemlemiştir. Klima cihazının gücü 2,4 kilovat ise, Yana odasını 23 Santigrat derece yerine 22 Santigrat dereceye ısıtmaya karar verirse ne kadar kömür tasarruf edilecektir?

8. Deyan, her biri 12 gram olan 10 kebabın sindirimi için gerekli zamanı belirlemek istemektedir. Midede 15 miligram proteinin sindirimi için pepsin enziminin 1 miligramı gereklidir.
   a) Proteinler et kütlesinin %20'sini oluşturuyorsa, kebapların sindirimi için kaç miligram pepsin gereklidir?
   b) Organizma her saat 200 miligram pepsin üretiyorsa, kebapların sindirimi kaç saat sürecektir?

9. Telefon sinyali, telefon şebekesinde ışık hızında, $3 \cdot 10^8$ metre/saniye hızla hareket ederken, ses saniyede 340 metre hızla hareket eder. Ana ile Bojan 1,7 metre uzaklıktaki iki telefonda konuşmaktadır. Kulaklıktaki ses ile Ana'nın sesini Bojan aynı anda işitiyorsa, telefon sinyali ne kadar yol kateder?

3.9. İki Bilinmeyenli İki Lineer Denklem Sistemi

İki Bilinmeyenli Lineer Denklem

ETKİNLİK

"İvan'ın 24 defteri vardır; bunların 5x'i mavi defter ve 7y'si yeşil defterdir." ifadesine uygun bir denklem yaz.
Yazdığın denklem kaç bilinmeyen içerir?
Denklemde bilinmeyenlerin üssünün en büyük derecesi nedir?

İki reel bilinmeyenli birinci dereceden bir denklem, **iki bilinmeyenli lineer denklem** olarak adlandırılır.
İki bilinmeyenli lineer bir denklemin **çözümü**, denklemın doğru sayısal eşitliğe dönüştüğü her sıralı gerçek sayı çifti (x, y)'dir.

ÖRNEK 1

a) $5x - 6y = 9$, $3x = 4y$ ve $y = 1 - x$ denklemleri, iki bilinmeyenli denklemlere örnektir.
b) $2x + 3y = 4$ denklemi için $(2, 0)$ çifti çözümdür; çünkü $2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$'tür.
$(2, -4)$ çifti çözüm değildir; çünkü $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \neq 4$'tür.

SORU 1

$(2x - 3)m - 6 = y + m$ denklemi için, $(1, 2)$ çiftinin çözüm olması amacıyla m parametresinin değerini belirle.

İki aynı bilinmeyenli iki lineer denklemin çözüm kümeleri eşitse, bu denklemler **eşdeğer** olarak adlandırılır.
Aşağıdaki **eşdeğer dönüşümler**, iki bilinmeyenli bir lineer denklem üzerinde uygulandığında ona eşdeğer bir denklem elde edilir:

- Denklemin bir tarafı, özdeş olarak eşit bir ifadeyle değiştirilir.
- Denklemin her iki tarafına aynı ifade eklenir; başka bir deyişle, denklemin bir terimi işareti zıddıyla diğer tarafa taşınır.
- Denklemin her iki tarafı, sıfırdan farklı aynı sayı ile çarpılır veya bölünür.

ÖRNEK 2

Verilen denklemin, kendisine eşdeğer daha basit bir denklemle değiştirilmesini izle:
$\frac{y-2}{6} - \frac{x}{3} = y - \frac{x+1}{4}$

Denklemin her iki tarafını EKOK (6, 3, 4) = 12 ile çarparız

$12\left(\frac{y-2}{6} - \frac{x}{3}\right) = 12\left(y - \frac{x+1}{4}\right)$	Kısaltıyoruz.
$2(y-2) - 4x = 12y - 3(x+1)$	Parantezlerden kurtuluyoruz.
$2y - 4 - 4x = 12y - 3x - 3$	$12y$ ve $-3x$ terimlerini denklemin sol tarafına taşıyoruz, işaretleri zıddına dönüşecektir.
	-4 terimini denklemin sağ tarafına taşıyoruz, işareti zıddına dönüşecektir.
$2y - 4x \ -12y + 3x = -3 + 4$	Benzer terimleri topluyoruz.
$-x - 10y = 1$	Elde edilen denklem verilen denkleme eşdeğerdir.

Uygun seçilmiş temel dönüşümlerle iki bilinmeyenli her lineer denklem,

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

türündeki lineer bir denkleme indirgenir; burada a, b ve c, x ve y bilinmeyenlerini içermeyen sayılar veya ifadelerdir. (1) denklemi, **iki bilinmeyenli lineer denklemin** genel türü olarak adlandırılır; a ve b, bilinmeyenlerin **katsayıları**, c ise **serbest terim** olarak adlandırılır.

SORU 1

Eşdeğer dönüşümlerle, $\frac{x}{2} - \frac{y-3}{5} - 2 = 3 - x$ denklemini genel biçime getir.

Lineer denklem (1)'in çözüm kümesini inceleyelim:

1°. $ax + by = c, a \neq 0$
Her sıralı çift $\left(\frac{c-bk}{a}, k\right), k \in \mathbb{R}$, denklemin bir çözümüdür.
Denklemin çözüm kümesi $R = \left\{\left(\frac{c-bk}{a}, k\right) \middle| k \in \mathbf{R}\right\}$'dir.

2°. $ax + by = c, a = b = 0, c \neq 0$
Denklemin gerçek çözümü yoktur, çözüm kümesi $R = \varnothing$'dir.

3°. $ax + by = c, a = b = c = 0$
Her sıralı gerçek sayı çifti denklemin çözümüdür; çözüm kümesi $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$'dir.

ÖRNEK 3

Verilen denklemleri çöz: a) $3(x-2) + 2(y-3) = 2x + y$ b) $3(x-2) + 2(y-3) = 3x + 2y$

a) $3(x-2) + 2(y-3) = 2x + y$ $x + y = 12$	Denklemi daha basit eşdeğer biçime getiriyoruz $a = 1 \neq 0$. Çözüm kümesi $R = \{(12-k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$.
b) $3(x-2) + 2(y-3) = 3x + 2y$ $-12 = 0$	Denklem daha basit eşdeğer biçime getirilir. $a = b = 0, c = -12 \neq 0$. Çözüm kümesi $R = \varnothing$.

İki bilinmeyenli lineer denklemin $ax + by = c$ biçimindeki çözümleri (x, y) olan düzlemdeki tüm noktaların kümesine, **lineer denklemin grafiği** denir.

Eğer $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise, iki bilinmeyenli lineer denklem $ax + by = c$,
denklemine eşdeğerdir:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

ki bu aslında bir lineer fonksiyondur; grafiği, eğim katsayısı $-\frac{a}{b}$ olan bir doğrudur.
Özellikle, $a = 0$ ise, doğru x-eksenine paraleldir.

Eğer $a \neq 0$ ve $b = 0$ ise, iki bilinmeyenli lineer denklem $ax + by = c$,

$$x = \frac{c}{a}$$

denklemine eşdeğerdir ve bunun grafiği y-eksenine paralel bir doğruyu temsil eder.

ÖRNEK 4

İki bilinmeyenli lineer denklemin grafiğini çiz:

a) $x - 2y = 6$ b) $4(x + y) = 8 + 4x$ c) $3(x - y) = 6 - 3y$

a) $x - 2y = 6$ Denklemi eşdeğer biçime getiririz.

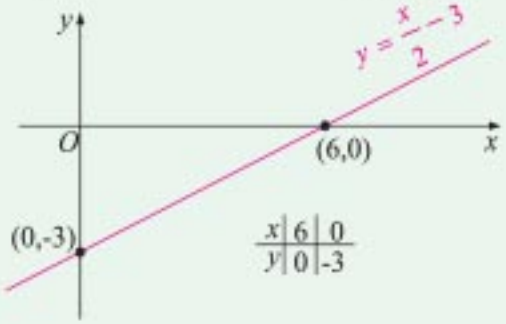
$y = \frac{x}{2} - 3$ Grafiği, $y = \frac{x}{2} - 3$ doğrusudur (Şekil 1).

b) $4(x + y) = 8 + 4x$ Denklemi eşdeğer biçime getiririz.

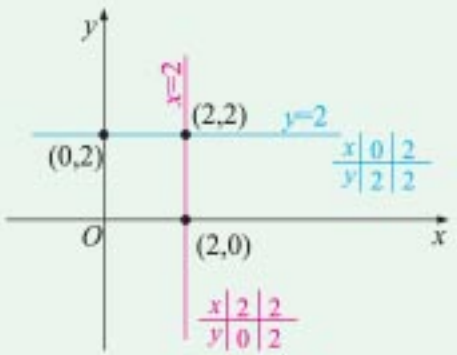
$y = 2$ Grafiği, $y = 2$ doğrusudur (Şekil 2).

c) $3(x - y) = 6 - 3y$ Denklemi eşdeğer biçime getiririz.

$x = 2$ Grafiği, $x = 2$ doğrusudur (Şekil 2).



Şekil 1



Şekil 2

SORU 1

Bir fabrika A ve B olmak üzere iki ürün üretir. Ürün A'nın bir parçasını üretmek için 4 iş saati, ürün B'nin bir parçasını üretmek için 6 iş saati gereklidir. Fabrika aylık 120 saatlik kapasiteyle çalışmaktadır.

Ürün B'den ayda 16 parça üretiliyorsa, ürün A'dan ayda kaç parça üretilecektir?

İki Bilinmeyenli Iki Lineer Denklem Sistemi

ETKİNLİK

Alttaki ifadeye göre iki denklem yaz.
"Drita'nın 14 parça giysisi vardır; bunların 3x'i bluz ve 2y'si pantolondur. Bluz sayısı pantolonlardan 2 fazladır."
Yazdığın her denklem kaç bilinmeyen içerir?
Her denklemde bilinmeyenlerin üssünün en büyük derecesi nedir?
Yazdığın aynı iki bilinmeyenli iki lineer denklemden oluşan küme neyi temsil eder?

Aynı iki gerçek bilinmeyenli iki lineer denklemden oluşan kümeye, **iki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemi** denir.

ÖRNEK 5

Sistem $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$ iki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemi örneğidir.

İki bilinmeyenli iki lineer denklem sisteminin **çözümü**, sistemdeki her denklemin çözümü olan her sıralı gerçek sayı çiftidir (x, y).

ÖRNEK 6

a) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-4y=-2 \end{cases}$ Sıralı çift $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ sistemdeki her denklemin çözümüdür; dolayısıyla verilen sistemin çözümüdür.
Sıralı çift $(-3, 5)$, $3x+2y=1$ denkleminin çözümüdür; ancak $x-4y=-2$ denkleminin çözümü değildir; dolayısıyla verilen sistemin çözümü değildir.

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ Sistemin çözümü yoktur; çünkü iki sayının toplamı aynı anda iki farklı değer alamaz.

c) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ Sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır; çünkü toplamı bire eşit olan sonsuz sayıda gerçek sayı çifti mevcuttur.

İki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemleri, çözüm kümeleri eşitse **eşdeğer**dir.
Sistemdeki her denklem, onunla eşdeğer bir denklemle değiştirilirse, başlangıç sistemiyle eşdeğer bir sistem elde edilir. İki bilinmeyenli her lineer denklem, genel biçim $ax+by=c$ ile eşdeğer olduğundan, iki bilinmeyenli iki lineer denklemden oluşan her sistem **genel biçime** indirgenebilir:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

burada a_1, a_2, b_1 ve b_2, **bilinmeyenlerin katsayıları**; c_1 ve c_2 **serbest terimlerdir**.

ÖRNEK 3

Sistemi genel biçime indirge: $\begin{cases} 2(x+1)-3=5(y+2) \\ \frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1 \end{cases}$.

$2(x+1)-3=5(y+2)$	Sistemin ilk denklemi, genel biçimde ona eşdeğer bir denklemle değiştirilir.
$2x-5y=11$	Genel biçimde ona eşdeğer denklemdir.
$\frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1$	Sistemin ikinci denklemi, genel biçimde ona eşdeğer bir denklemle değiştirilir.
$5x-3y=21$	Genel biçimde ona eşdeğer denklemdir.
$\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 5x-3y=21 \end{cases}$	Elde edilen sistem verilenle eşdeğerdir ve genel biçimdedir.

Eğer bir sistem, temel dönüşümlerle $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ biçimine getirilirse, (p, q) sıralı çifti sistemin çözümüdür.

ÖRNEK 4

$\begin{cases} 2(x+y)-3=2y+1 \\ 3x-y+1=-2x+5(x+1) \end{cases}$	Sistemi genel biçime getiriyoruz.
$\begin{cases} 2x=4 \\ -y=4 \end{cases}$	Temel dönüşümler uygularız.
$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$	$(2, -4)$ sıralı çiftinin sistemin çözümü olduğunu okuruz.

İki bilinmeyenli iki lineer denklemden oluşan bir sistemi çözmenin tüm yöntemlerinin temel fikri, sistemi bir dizi eşdeğer dönüşümle

$$\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$$

biçimine getirmektir. O zaman (p, q) sıralı çifti sistemin çözümüdür.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Drin, kütlesi 0,1 kilogram olan iki topu dikey yukarı fırlatır. Birincisi x yüksekliğinde, ikincisi y yüksekliğinde ise, iki topun potansiyel enerjilerinin toplamını hesaplayacak bir ifade yaz. Potansiyel enerji ifadesi $E_p = mgh$ olarak verilmiştir. $g = 10\ m/s^2$ kullan.

2. $2x + 3y = 3$ denklemi veriliyor. Aşağıdakiler için çözümü bul:
   a) $x = 3$ b) $y = -1$ c) $x = 0$ d) $y = 0$

3. Eşdeğer dönüşümler yardımıyla denklemleri genel biçime getir:
   a) $3(x-2)-2(y-5)=x-y$ b) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3$ c) $\frac{x+y}{3}-\frac{y}{2}=5x-y$

4. Lineer denklemin çözüm kümesini yaz:
   a) $3x+7y=41$ b) $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{5}-1=0$ c) $2\left(\frac{x}{4}-3\right)+3y+2=2x+3(y-4)$

5. Lineer denklem $3(x-y)+2=x-5y+1$'in çözüm kümesinde, $x=2y$ olan çözümü bul.

6. Doğrusal denklemin grafiğini çiz:
   a) $3x-2y=-12$ b) $3\left(\frac{x+1}{3}-4y\right)+6=3x$ c) $2x=0$ d) $-5y=0$

7. $2x+by=5$ lineer denkleminin grafiği $A(-1, 3)$ noktasından geçmesi için b parametresinin değeri nedir?

8. ir diyet, bir öğünde iki tür ürünün tüketilmesine izin verir. Birinci üründen bir birim 80 miligram C vitamini, ikinci üründen bir birim 160 miligram C vitamini içerir. Günlük C vitamini gereksinimi 960 miligramdır.
   a) İkinci üründen 30 birim içeren bir öğünde, birinci üründen kaç birim tüketilmelidir?
   b) Birinci ürün öğünden çıkarılırsa, ikinci üründen kaç birim tüketilmelidir?

9. İki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini genel biçime getir:
   a) $\begin{cases}3(x-2y)=6y\\x+y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x+y}{3}+x=15\\y-\frac{y-x}{3}=\frac{6}{5}\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{x+7}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5\\\frac{4x-3}{6}+\frac{5y-7}{2}=18-5x\end{cases}$

3.10. İki bilinmeyenli İki Lineer Denklem Sistemini Çözme Yöntemleri

Grafik Yöntemi

ETKİNLİK

İki bilinmeyenli lineer denklemin grafiğini çiz:
a) $x-4y=8$ b) $2(x-y)=2x-2y$ c) $5(x+y)=10+5x$

İki bilinmeyenli iki lineer denklemden oluşan bir sistem için, p birincinin grafiği, q ikincinin grafiği olsun. Eğer (m, n) sıralı gerçek sayı çifti sistemin çözümü ise, (m, n) her iki denklemin de çözümüdür; bu da (m, n) koordinatlı noktanın p ve q grafikleri üzerinde bulunacağı anlamına gelir. Grafikler p ve q doğrular ise, bu doğruların birbirlerine göre durumuna bağlı olarak şunlara sahip oluruz:

1°. Eğer doğrular kesişirse, o hâlde iki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemi **tek bir çözüme sahiptir** (sistem belirlidir).

2°. Eğer doğruların ortak noktası yoksa, o hâlde iki bilinmeyenli iki lineer denklem sisteminin **çözümü yoktur** (sistem çelişkilidir).

3°. Eğer doğrular çakışıyorsa, o hâlde iki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemi **sonsuz sayıda çözüme sahiptir** (sistem belirsizdir).

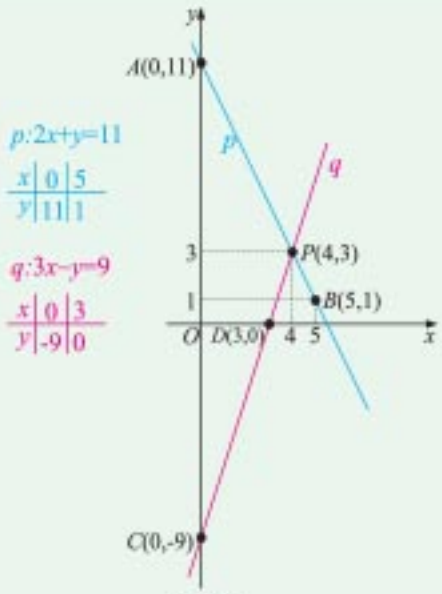
İki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini grafik yöntemle çözmek demek, iki lineer denklemin grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizmek ve karşılıklı durumlarını incelemek demektir.

ÖRNEK 1

Sistemi grafik yöntemle çöz:

a) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 9 \end{cases}$

a)



$p: 2x+y=11$

x	0	5
y	11	1

$q: 3x-y=9$

x	0	3
y	-9	0

Şekil 1

İlk denklemin grafiği p doğrusudur ve $A(0, 11)$ ve $B(5, 1)$ noktalarından geçer.

İkinci denklemin grafiği q doğrusudur ve $C(0, -9)$ ve $D(3, 0)$ noktalarından geçer.

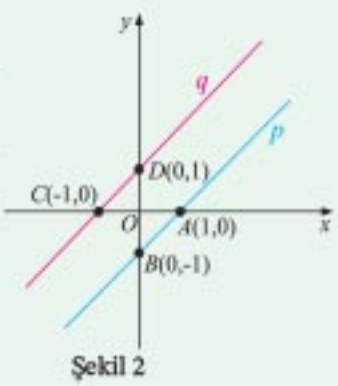
p ve q doğruları $P(4,3)$ noktasında kesişir.
Sıralı çift (4,3) sistemin tek çözümüdür (Şekil 1).

b) $p: x-y=1$

x	0	1
y	-1	0

$q: x-y=-1$

x	0	-1
y	1	0



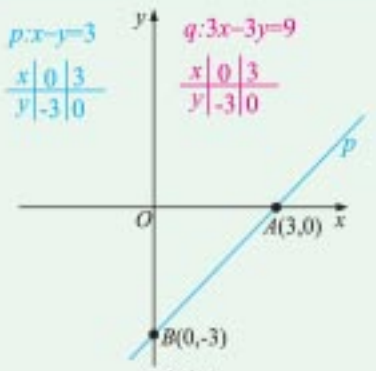
Şekil 2

Ik denklemin grafiği p doğrusudur ve $A(1, 0)$ ve $B(0, -1)$ noktalarından geçer.

İkinci denklemin grafiği q doğrusudur ve $C(-1, 0)$ ve $D(0, 1)$ noktalarından geçer.

p ve q doğruları paralel ve farklıdır. Sistemın çözümü yoktur (Şekil 2).

c)



Şekil 3

Ik denklemin grafiği p doğrusudur ve A(3, 0) ve B(0, –3) noktalarından geçer.

İkinci denklemin grafiği q doğrusudur ve aynı A(3, 0) ve B(0, –3) noktalarından geçer.

p ve q doğruları çakışır.

Sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır (Şekil 3).

SORU 1

Sistemlerii grafiksel olarak çöz:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$

ARAŞTIRMA

Aşağıdaki sistemin ne zaman tek çözümü olduğunu, ne zaman sonsuz sayıda çözümü olduğunu veya ne zaman çelişkili olduğunu araştır ve keşfet:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

1. $b_1=0$ veya $b_2=0$ ise. 2. $a_1=0$ veya $a_2=0$ ise. 3. $a_1=0$ ve $b_2=0$ ya da $a_2=0$ ve $b_1=0$ ise.

4. $b_1\neq 0$ ve $b_2\neq 0$ ise ve şu koşullar söz konusuysa:

a) $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ b) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ ve $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ c) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ ve $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$.

Yerine Koyma Yöntemi

ETKİNLİK

İki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini çöz:

a) $\begin{cases} x=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x+2)-7=0 \\ y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+4=0 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

Eğer sistemdeki denklemlerden birinde bir bilinmeyeni diğerinin cinsinden ifade eder, sonra elde edilen ifadeyle o bilinmeyeni ikinci denklemde değiştirirsek, yeni elde edilen denklem ile sistemin ilk denklemi, verilen sistemle eşdeğer yeni bir sistem oluşturur. Bu çözüm yöntemine **yerine koyma yöntemi** denir. Bu yöntemin uygulanabilmesi için sistemin genel biçime getirilmesi gerekir.

ÖRNEK 2

Yerine koyma yöntemiyle sistemi çöz:

a) $\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}=x+y \\ \frac{7x-2}{6}-\frac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x-y=2 \end{cases}$ İkinci denklemi x'e göre çözüyoruz.

$\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x=2+y \end{cases}$ Elde edilen x ifadesini birinci denklemde yerine koyuyoruz.

$\begin{cases} 3(2+y)-2y=-9 \\ x=2+y \end{cases}$ Birinci denklemi eşdeğer dönüşümlerle sadeleştiriyoruz.

$\begin{cases} y=-15 \\ x=2+y \end{cases}$ Elde edilen y değerini ikinci denklemde yerine koyuyoruz.

$\begin{cases} y=-15 \\ x=-13 \end{cases}$ Sistemin tek bir çözümü vardır (–13, –15).

b) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}=x+y \\ \frac{7x-2}{6}-\frac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$ Bir dizi dönüşümle sistemi genel biçime getiriyoruz.

$\begin{cases} 8x-3y=13 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ İkinci denklemi y'ye göre çözüyoruz.

$\begin{cases} 8x-3y=13 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Elde edilen y ifadesini birinci denklemde yerine koyuyoruz.

$\begin{cases} 8x-3\cdot\frac{8-3x}{2}=13 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Birinci denklemde eşdeğer dönüşümler uyguluyoruz.

$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Elde edilen x değerini ikinci denklemde yerine koyuyoruz.

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ Sistemin tek bir çözümü vardır (2, 1).

c) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Birinci denklemi y'ye göre çözüyoruz.

$\begin{cases} y=3-x \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Elde edilen y ifadesini ikinci denklemde yerine koyuyoruz.

$\begin{cases} y=3-x \\ 2x+2(3-x)=5 \end{cases}$ İkinci denklemde eşdeğer dönüşümler uyguluyoruz.

$\begin{cases} y=3-x \\ 0\cdot x=-1 \end{cases}$ Denklem $0\cdot x=-1$'in çözümü yoktur. Sistem çözümsüzdür.

SORU 2

Yerine koyma yöntemiyle sistemi çöz:

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 6x-2y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15 \\ y-\frac{y-x}{5}=\frac{6}{5} \end{cases}$

Zıt Katsayılar Yöntemi

Bir sistemde bir denklemin sol tarafını diğerinin sol tarafıyla toplayarak (veya çıkararak), sağ tarafını da diğerinin sağ tarafıyla toplarsak (ya da çıkarırsak) yeni bir denklem elde ederiz; bu denklem, verilen denklemlerden biriyle birlikte, verilen sistemle eşdeğer olan iki bilinmeyenli iki lineer denklemden oluşan yeni bir sistem oluşturur. Bu işleme **zıt katsayılar yöntemi** denir ve sistem genel biçime getirildikten sonra uygulanır.

ÖRNEK 3

Zıt katsayılar yöntemiyle sistemi çöz:

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+1)(y-1)-2x=x(y-1) \\ 3xy+10(x+4)=3y(x+4) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=2 \end{cases}$, m gerçek bir parametredir.

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

Birinci denklemin sol tarafını ikinci denklemin sol tarafıyla, birinci denklemin sağ tarafını da ikinci denklemin sağ tarafıyla topluyoruz.

Elde edilen denklem, birinci denklemle birlikte verilen sistemle eşdeğer yeni bir sistem oluşturur.

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y+(2x+y)=9+1 \\ 2x+y=1 \\ 5x=10 \end{cases}$

İkinci denklemi eşdeğer dönüşümlerle sadeleştiriyoruz.

$5x=10$ denkleminden bulunan çözümü birinci denklemde yerine koyuyoruz.

$\begin{cases} 2\cdot 2+y=1 \\ x=2 \end{cases}$

Bilinmeyen y'nin değerini hesaplıyoruz.

$\begin{cases} y=-3 \\ x=2 \end{cases}$

Sistemin tek bir çözümü vardır: $(2, -3)$.

b) $\begin{cases} (x+1)(y-1)-2x=x(y-1) \\ 3xy+10(x+4)=3y(x+4) \end{cases}$

Sistemi genel biçime getiriyoruz.

$\begin{cases} -2x+y=1 \\ 5x-6y=-20 \end{cases}$

Birinci denklemin her iki tarafını 6 ile çarpıyoruz. Elde edilen denklemin sol tarafını ikinci denklemin sol tarafıyla, sağ tarafını da ikinci denklemin sağ tarafıyla topluyoruz.

Elde edilen denklem, birinci denklemle birlikte verilen sistemle eşdeğer yeni bir sistem oluşturur.

$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 5x - 6y + 6(-2x + y) = -20 + 6 \end{cases}$ İkinci denklemi eşdeğer dönüşümlerle sadeleştiriyoruz.

$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -7x = -14 \end{cases}$ $-7x = -14$ denkleminin çözümünü birinci denklemde yerine koyuyoruz.

$\begin{cases} -2 \cdot 2 + y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ Bilinmeyen y'nin değerini hesaplıyoruz.

$\begin{cases} y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$ Sistemin tek bir çözümü vardır (2, 5).

c) $\begin{cases} x - 2y = m \\ x + my = 2 \end{cases}$ Birinci denklemin sol tarafını ikinci denklemin sol tarafından ve birinci denklemin sağ tarafını ikinci denklemin sağ tarafından çıkarıyoruz.

Elde edilen denklem, birinci denklemle birlikte verilen sistemle eşdeğer yeni bir sistem oluşturur.

$\begin{cases} x - 2y = m \\ x + my - (x - 2y) = 2 - m \end{cases}$ İkinci denklemi eşdeğer dönüşümlerle sadeleştiriyoruz.

$\begin{cases} x - 2y = m \\ (2 + m)y = 2 - m \end{cases}$ Gerçek parametre m için tartışmaya (değerlendirmeye) başlıyoruz.

- $m = -2$ ise, sistemin ikinci denklemi $0 \cdot y = 4$ biçimindedir; dolayısıyla sistem çelişkilidir.
- $m \neq -2$ ise, sistem şu biçimi alır: $\begin{cases} x - 2y = m \\ y = \dfrac{2 - m}{2 + m} \end{cases}$.

Son sistemin çözümü $x = \dfrac{m^2 + 4}{m + 2}$ ve $y = \dfrac{2 - m}{2 + m}$ dir.

ALIŞTIRMA SORULARI

İki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini grafikle çöz:

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x = y + 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

Yerine koyma yöntemiyle iki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini çöz:

7. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x - y = 8 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 3x = 2y - 9 \\ x = 2 + y \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3(x + 2y) = 4(y - x) + 2 \\ 5(x + y) = 3(y - 2x) + 2 \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dfrac{x + y}{3} + x = 15 \\ y - \dfrac{y - x}{5} = \dfrac{6}{5} \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 3x + y = a \\ x - 3y = b \end{cases}$, a ve b gerçek parametrelerdir]

Zıt katsayılar yöntemiyle iki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini çöz:

13. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x = y \\ 2y = 10 - 3x \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = -2 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y+4}{5} = 0 \\ \frac{x+1}{4} = \frac{x+2}{3} \end{cases}$ 18. $\begin{cases} ax + by = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$, a ve b gerçek parametrelerdir

19. Hangi m parametre değeri için sistem:

a) $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$ çelişkilidir b) $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x - my = 2 \end{cases}$ belirlenmiştir

c) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + my = m + 2 \end{cases}$ belirsizdir

3.11. İki bilinmeyenli İki Lineer Denklem Sisteminin Problem Durumlarında Uygulanması

ETKİNLİK

Bir şirket, x adet standart yazılım lisansı ve y adet premium yazılım lisansı için abonelik yapmıştır. Standart lisans aylık 120 denar, premium lisans aylık 200 denardır. Şirket 15 lisans için aylık 2 280 denar ödemiştir.

Şirketin abone olduğu standart ve premium yazılım lisanslarının sayısını bulabilmen için iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir sistem kur.

Günlük yaşamın, tekniğin ve genel olarak bilimin birçok problemi, denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümüne indirgenir.

ÖRNEK 1

Dikdörtgen biçimindeki bir çim parselinin çevresi 40 metredir. Genişliğinden 4 metre daha uzun olan parselin uzunluğunu ve genişliğini bul.

Parselin uzunluğu x metre ve genişliği y metre olsun.

Problemin birinci koşulundan, dikdörtgenin çevresi 40 metre olduğuna göre $2x + 2y = 40$ denklemini elde ederiz. Problemin ikinci koşulundan, parselin uzunluğu genişliğinden 4 metre büyüktür; buradan $x - 4 = y$ denklemini elde ederiz. Böylece şu sistemi elde ederiz: $\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ x - 4 = y \end{cases}$

bu sistemin çözümü $x = 12$ ve $y = 8$'dir. Çim parseli 12 metre uzunluğunda ve 8 metre genişliğindedir.

Kontrol: $\begin{cases} 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 40 \\ 12 - 4 = 8 \end{cases}$

ÖRNEK 2

Bir matematik testinde 10 soru vardı. Her doğru çözülen soru için 3 puan alınır, her yanlış çözülen soru için 2 puan düşülür.
Tüm soruları çözen ve 15 puan alan bir öğrenci kaç soruyu doğru çözmüştür?

x, doğru çözülen soru sayısı; y, yanlış çözülen soru sayısı olsun.

Birinci koşuldan (öğrencinin 15 puan aldığı) $3x - 2y = 15$ denklemini elde ederiz.

İkinci koşuldan (testte 10 soru olduğu ve öğrencinin hepsini çözdüğü) $x + y = 10$ denklemini elde ederiz.

Bu şekilde $\begin{cases} 3x - 2y = 15 \\ x + y = 10 \end{cases}$ sistemini elde ederiz; çözümü $x = 7$ ve $y = 3$'tür. Öğrenci 7 soruyu doğru çözmüştür.

Kontrol: $\begin{cases} 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15 \\ 7 + 3 = 10 \end{cases}$

ÖRNEK 3

Kapasiteleri 100 litre ve 144 litre olan iki kapta belli bir miktar sıvı bulunmaktadır.
Eğer küçük kaptaki sıvıyı büyük kaba boşaltır ve onu doldurursak, küçük kapta ilk miktarın $\frac{1}{5}$'i kalacaktır. Eğer büyük kaptaki sıvıyı küçük kaba boşaltır ve onu doldurursak, büyük kapta ilk miktarın $\frac{7}{12}$'si kalacaktır. Dökmeden önce kaplarda ne kadar sıvı vardı?

x, dökmeden önce küçük kaptaki; y, dökmeden önce büyük kaptaki sıvı miktarı olsun.

Sorudaki koşullara göre $\begin{cases} \frac{4}{5}x + y = 144 \\ x + \frac{5}{12}y = 100 \end{cases}$ sistemine ulaşırız; çözümü $x = 60$ ve $y = 96$'dır.

Dökmeden önce küçük kapta 60 litre, büyük kapta 96 litre sıvı vardı.

Kontrol: $\begin{cases} \frac{4}{5} \cdot 60 + 96 = 144 \\ 60 + \frac{5}{12} \cdot 96 = 100 \end{cases}$

ÖRNEK 4

Admir, 12 000 denarlık bir tutarı iki farklı bankaya yatırmıştır; birincisinde yıllık faiz oranı %9, ikincisinde %11'dir. Bir yıl sonunda 1180 denar faiz elde ettiyse, her bankaya ne kadar para yatırmıştır?

Birinci bankaya yatırılan miktar x denar, ikinci bankaya yatırılan miktar y denar olsun.

Koşullardan $\begin{cases} x + y = 12\,000 \\ 0{,}09x + 0{,}11y = 1180 \end{cases}$ sistemine ulaşırız; çözüm $x = 7000$ ve $y = 5000$'dir.

Admir, birinci bankaya 7000 denar, ikinci bankaya 5000 denar yatırmıştır.

Kontrol: $\begin{cases} 7000 + 5000 = 12\,000 \\ 0{,}09 \cdot 7000 + 0{,}11 \cdot 5000 = 1180 \end{cases}$

ÖRNEK 5

Bir bisikletli iki şehir arasındaki mesafeyi sabit hızla belirli bir sürede kat eder. Hızını saatte 5 kilometre artırırsa 1 saat daha erken, hızını saatte 3 kilometre azaltırsa 1 saat daha geç varacaktır. Bisikletlinin hızını, şehirler arasındaki mesafeyi kat ettiği zamanı ve şehirler arasındaki mesafeyi bulun.

Bisikletlinin hızı x km/saat ve şehirler arasındaki mesafeyi kat ettiği süre y saat olsun. Bu durumda, x km/saat hızla y saatte xy kilometre yol alır; $(x + 5)$ km/saat hızla $(y - 1)$ saatte $(x + 5)(y - 1)$ kilometre yol alır. İki durumda da alınan yol şehirler arasındaki mesafeye eşit olduğundan $(x + 5)(y - 1) = xy$ denklemini elde ederiz.

Aynı şekilde düşündüğümüzde $(x - 3)(y + 1) = xy$ denklemini elde ederiz.

Böylece $\begin{cases}(x+5)(y-1)=xy\\(x-3)(y+1)=xy\end{cases}$

sistemine ulaşırız; çözümü $x = 15$ ve $y = 4$'tür. Bisikletlinin hızı 15 km/saat, şehirler arasındaki mesafeyi kat etme süresi 4 saat ve şehirler arası mesafe $15 \cdot 4 = 60$ kilometredir.

Kontrol: $\begin{cases}(15+5)(4-1)=15\cdot 4\\(15-3)(4+1)=15\cdot 4\end{cases}$

SORU 1

Bir uzay gemisi iki tür yakıt kullanır: ana yakıt ve yedek yakıt. Her birim ana yakıt 5 kilometrelik bir yolculuk sağlar. Her birim yedek yakıt 3 kilometrelik bir yolculuk sağlar. Toplam 20 birim yakıt kullanıldıktan sonra, gemi 80 kilometre yol almıştır. Uzay gemisi her yakıttan kaç birim kullanmıştır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir dikdörtgenin uzunluğu, genişliğinin iki katıdır. Çevresi 72 santimetre ise uzunluğu ve genişliği nedir?
2. İki bütünleyen açıdan (supplementary) büyük olanı, küçük olanın üç katından 4 fazladır. Açıları bulun.
3. Bir dik üçgende büyük olan dar açı, küçük olan dar açının iki katından 15 derece daha küçüktür. Dik üçgendeki dar açıları bulun.
4. Marko satış elemanı olarak işe girmek istiyor. Birinci şirket günlük 800 denar ve satılan her ürün başına 10 denar teklif ediyor. İkinci şirket günlük 1000 denar ve satılan her ürün başına 8 denar teklif ediyor. Marko'nun her iki şirkette de ücreti eşit olsun diye kaç ürün satması gerekir?
5. Okulun ısıtılması için kullanılan iki fuel-oil kazanı toplam 500 litre alır. Büyük kazan, küçük kazandan 120 litre daha fazla alır. Her kazan kaç litre alır?
6. Rina her gün koşar ve bisiklete biner. İlk gün 10 dakika koşmuş ve 20 dakika bisiklete binmiş, toplam 300 kalori harcamıştır. İkinci gün süreleri değiştirerek 20 dakika koşmuş ve 10 dakika

bisiklete binmiş, yine 300 kalori harcamıştır. Rina koşu ile dakikada kaç kalori, bisikletle dakikada kaç kalori yakmaktadır?

7. Okul sekreteri Petar, kırtasiye malzemesi satın almalıdır. Geçen hafta 3 paket kâğıt ve 4 paket ataş için 2000 denar ödedi. Bu hafta 5 paket kâğıt ve 2 paket ataş için 3100 denar ödedi. Bir paket kâğıdın fiyatı nedir, bir paket ataşın fiyatı nedir?

8. İki sandviç ve üç dilim kaşardaki toplam tuz miktarı 4720 miligramdır. Beş sandviç ve iki dilim kaşarda 6300 miligram tuz vardır. Bir sandviçte ne kadar, bir dilim kaşarda ne kadar tuz vardır?

9. Bir motorlu teknenin 18 kilometrelik bir mesafeyi akıntı yönünde 2 saatte, akıntıya karşı 4 saat 30 dakikada aldığı bilinmektedir. Teknenin durgun sudaki hızı ve nehrin akıntı hızı nedir?

10. Bir grup öğrenci belirli sayıda fidan satın almak için para toplamaya karar vermiştir. Her biri 150 denar verirse 170 denar eksik kalmaktadır; her biri 180 denar verirse 100 denar fazla olacaktır. Grupta kaç öğrenci vardır ve fidanlar için kaç para gereklidir?

3.12. Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Türleri ve Eşdeğer Eşitsizlikler

Eşitsizlik Türleri

ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloda verilen eşitsizlik işaretlerini kullanarak birer sayısal eşitsizlik kur:

küçüktür	büyüktür	küçük veya eşit	büyük veya eşit
$<$	$>$	$\leq$	$\geq$



En az birinde bir veya daha fazla değişken bulunan iki cebirsel rasyonel ifade, bir eşitsizlik işaretiyle bağlandığında bir **eşitsizlik** belirlenir.
Eşitsizlikteki değişkenlere **bilinmeyen** denir ve x, y, z, ... ile gösterilir.
Bilinmeyenlerin alabileceği uygun değerlerin kümesine eşitsizliğin **tanım kümesi** denir ve D ile gösterilir.

ÖRNEK 1

$5x + 3 > 2$ eşitsizliği, x bilinmeyeni üzerine bir eşitsizliktir ve tanım kümesi $D = \mathbb{R}$'dir.

Bilinmeyen sayısına göre, eşitsizlik şunlar olabilir: **bir bilinmeyenli eşitsizlik, iki bilinmeyenli eşitsizlik** vb.
Bilinmeyenlerin üssünün en büyük derecesine göre, eşitsizlik **birinci dereceden (lineer) eşitsizlik, ikinci dereceden (kare) eşitsizlik** vb. olabilir.

ÖRNEK 2

a) $2x + 4 < 7$ eşitsizliği, bir bilinmeyenli lineer bir eşitsizliktir.
b) $x + y \geq 2x$ eşitsizliği, iki bilinmeyenli lineer bir eşitsizliktir.
c) $x^2 \leq x + y$ eşitsizliği, iki bilinmeyenli kare (ikinci dereceden) bir eşitsizliktir.

ÖRNEK 3

$7 - 3x \geq 1$ eşitsizliği, $x = 2$ için doğru sayısal eşitsizliğe $7 - 3 \cdot 2 \geq 1$
$x = 3$ için yanlış sayısal eşitsizliğe $7 - 3 \cdot 3 \geq 1$ dönüşür.



Bir bilinmeyenli bir **eşitsizliğin çözümü**, tanım kümesinden eşitsizliği doğru sayısal eşitsizliğe dönüştüren her bilinmeyen değeridir.
Bir eşitsizliğin tüm çözümleri, **eşitsizliğin çözüm kümesini** oluşturur ve bunu R ile göstereceğiz.

ÖRNEK 4

a) $x > 5$ eşitsizliğinin çözümü, açık $(5, +\infty)$ aralığındaki her gerçek sayıdır; yani $R = (5, +\infty)$.
b) $6 + 3x \geq 3(2 + x)$ eşitsizliği için çözüm kümesi $R = D = \mathbb{R}$'dir. Bu durumda eşitsizlik bir özdeşliktir.
c) $7 + 3x < 2 + 3x$ eşitsizliği için çözüm kümesi $R = \varnothing$'dür. Bu durumda eşitsizlik **imkânsızdır.**

Eşdeğer Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

ETKİNLİK

$2 + x < 5$ ve $x - 3 < 0$ eşitsizlikleri için tanım kümesi ve çözüm kümesi hakkında nasıl bir sonuç çıkarabilirsin?



Aynı tanım kümesine ve aynı çözüm kümesine sahip iki eşitsizliğe **eşdeğer eşitsizlikler** denir.

Verilen bir eşitsizliği çözmek için onu daha basit ama ona eşdeğer bir eşitsizlikle değiştiririz. Sonra bu eşitsizliği yine ona eşdeğer üçüncü bir basit eşitsizlikle değiştiririz, vb., çözümleri açık olan bir eşitsizliğe ulaşıncaya kadar. Bir eşitsizliğin, ona eşdeğer başka bir eşitsizlikle değiştirilmesi işlemine **eşdeğer dönüşüm** denir.

ETKİNLİK

Verilen eşitsizliğin, ona eşdeğer daha basit bir eşitsizlikle dönüşümünü—çözümü açık olacak biçimde—takip et:

$x - 5 < 2$	Eşitsizliğin her iki yanına 5 sayısını ekliyoruz.
$x - 5 + 5 < 2 + 5$	Eşitsizliğin her iki tarafında belirtilen işlemleri yapıyoruz.
$x < 7$	Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.

–5 sayısını ters işaretle diğer tarafa geçirirsen aynı sonuca ulaşır mısın?



Eğer eşitsizliğin iki yanına, bilinmeyenin tüm izinli değerleri için tanımlı olan aynı ifadeyi eklersek, verilen eşitsizliğe eşdeğer bir eşitsizlik elde ederiz.
Bunun sonucu olarak:

- Eşitsizliğin iki yanında aynı işaretli eş terimler varsa, bunlar götürülebilir (çıkarılabilir).
- Eşitsizlikteki her terim bir taraftan diğerine taşınabilir ve bu sırada işareti zıt olur.

ÖRNEK 1

Eşitsizliğin eşdeğer dönüşümlerini takip et:

a) $5x - 3x + 3 \geq 8 - 3x$
$5x + 3 \geq 8$
Eş terimleri sadeleştiriyoruz: $-3x$ ve $-3x$.
Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.

b) $4x - 5 < 3x + 2$
$4x - 5 - 3x < 2$
$4x - 3x < 5 + 2$
$3x$ terimini eşitsizliğin sol tarafına taşıyoruz; işareti zıt olur.
-5 terimini eşitsizliğin sağ tarafına taşıyoruz; işareti zıt olur.
Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.



Eğer eşitsizliğin iki yanını, tanımlı ve bilinmeyenin tüm izinli değerleri için yalnızca pozitif değerler alan aynı ifade ile çarparsak, verilen eşitsizliğe eşdeğer bir eşitsizlik elde ederiz.

Buna bağlı olarak, eşitsizliğin iki yanında ortak pozitif bir çarpan varsa, her iki taraf bu çarpanla bölünebilir. Bu durumda **eşitsizliği sadeleştirmiş** oluruz.

ÖRNEK 2

$3(x-2) < 15$ eşitsizliği için eşdeğer dönüşümleri takip et.

$3(x-2) < 15$	Eşitsizliğin her iki tarafını 3 sayısına böleriz.
$x-2 < 5$	Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.

Not edelim ki, yukarıdaki özelliğin uygulanmasıyla, kesirli katsayılı bir eşitsizlik; eşitsizlikteki her terim, paydaların pozitif ortak katı ile çarpılırsa tam katsayılı bir eşitsizliğe dönüştürülebilir. Bu dönüşüme **eşitsizliği paydalardan kurtarma** denir.

ÖRNEK 3

$\frac{2x-7}{3} < \frac{x+1}{2} - 5$ Eşitsizliği paydalardan kurtar

$\frac{2x-7}{3} < \frac{x+1}{2} - 5$	Her terimi paydaların EKOK'u ile çarparız: EKOK(2, 3) = 6.
$6 \cdot \frac{2x-7}{3} < 6 \cdot \frac{x+1}{2} - 6 \cdot 5$	Sadeleştiririz (kısaltırız).
$2(2x-7) < 3(x+1) - 30$	Elde edilen eşitsizlik, verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.

SORU 1

$\frac{x-5}{2} - 3 > \frac{3x-2}{6}$ Eşitsizliği paydalardan kurtar.



Eğer eşitsizliğin iki yanını, bilinmeyenin tüm izinli değerleri için tanımlı olan ve yalnızca negatif değerler alan aynı bir ifade ile çarparsak ve eşitsizlik yönünü tersine çevirirsek ($<$ ile $>$, $>$ ile $<$, $\leq$ ile $\geq$, $\geq$ ile $\leq$), verilen eşitsizliğe eşdeğer bir eşitsizlik elde ederiz.

Bu özelliğin bir sonucu olarak, eşitsizliğin iki yanını -1 ile çarparsak eşitsizlik yönü değişir.

ÖRNEK 5

$-x > 7$	Eşitsizliğin iki yanını -1 ile çarparız.
$x < -7$	Eşitsizliğin yönü tersine çevrilmiştir.

Son iki özelliğin sonucu olarak: eşitsizliğin iki yanını belirli bir ifadeyle çarpıyorsak, bu ifadenin pozitif, negatif ya da sıfır olma durumlarını ayrı ayrı incelememiz gerekir.

İfade 0 olduğunda, $0 \geq 0$ ve $0 \leq 0$ doğru eşitsizliklerdir; $0 > 0$ ve $0 < 0$ yanlış eşitsizliklerdir.

SORU 2

Telefon abonelik ücreti $350 + 20x$ denardır; burada x kurulan aramaların sayısıdır. Telefon faturası 1000 denarı aşmaması için en fazla kaç arama yapılabilir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki eşitsizlikler eşdeğer midir?

   a) $x - 4x > 10 + 4x$ ve $x > 10$ b) $3x^2 + 3x > 12 + 3x^2$ ve $3x > 12$ c) $x + \frac{1}{x} \leq 5 + \frac{1}{x}$ ve $x \leq 5$

2. Aşağıdaki eşitsizliklerden hangileri özdeşliktir?

   a) $5x^2 - 2x^2 \geq x^2$ b) $3x - 2 < 3x + 1$ c) $(y + 5)^2 \geq y^2 + 10y + 5$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerden hangileri imkânsızdır?

   a) $5 - 4x > 10 - 4x$ b) $2(x - 3) + 2 < 2x + 6$ c) $\frac{4x - 1}{2} > \frac{6x + 2}{3}$

4. Sead'ın, eşitsizlik üzerinde eşdeğer dönüşümler yaparken yaptığı hataları bulun:

   a) $5(x - 2) + 3(x + 4) \geq 2(x - 1) + 8$
   $5x - 10 + 3x + 12 \geq 2x - 2 + 8$
   $8x + 2 \geq 2x + 6$
   $10x \geq 8$
   $x \geq \frac{4}{5}$

   b) $5(2 - 3x) \leq 2(x + 4) - 3(x - 1)$
   $10 - 15x \leq 2x + 8 - 3x + 3$
   $-15x - 2x + 3x \leq 8 + 3 - 10$
   $-14x \leq 1$
   $x \leq -\frac{1}{14}$

5. Bir sunucu saatte $8x$ istek alıyor; burada x kullanıcı sayısıdır. Sunucu saatte en fazla 5000 isteği işleyebiliyorsa, en fazla kaç kullanıcı olabilir?

3.13. Bir Bilinmeyenli Lineer Eşitsizliklerin Kurulması ve Çözümü

Bir Bilinmeyenli Lineer Eşitsizliklerin Çözümü

ETKİNLİK

$5x+4>8+2x$ eşitsizliğine eşdeğer dönüşümler uygulayarak tüm terimleri sol tarafa taşıyıp sadeleştir. Ardından elde edilen eşitsizliğin biçimini açıkla.

Yukarıdaki tüm dönüşümlerle, her bir bilinmeyenli lineer eşitsizlik şu biçimdeki bir lineer eşitsizliğe indirgenir:

$ax + b > 0$ (veya $ax + b \geq 0$)

buna **bir bilinmeyenli lineer eşitsizliğin genel biçimi** denir. Burada a, bilinmeyenin **katsayısı**; b ise **sabit terimdir**.

ETKİNLİK

Aşağıdaki lineer eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulun:

a) $2x+4<0$ b) $0\cdot x\le 2$ c) $0\cdot x\ge 0$.

Bir bilinmeyenli lineer eşitsizliğin çözüm kümesini inceleyelim:

1°. $ax+b>0$ (veya $ax+b\ge 0$) ve $a>0$. b sağ tarafa taşınır ve a'ya bölünür:

$x>-\frac{b}{a}$ (veya $x\ge -\frac{b}{a}$) Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.
Çözüm kümesi soldan kapal bir aralıktır:
$\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$ (veya $\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$).

2°. $ax+b>0$ (veya $ax+b\ge 0$) ve $a<0$ b sağ tarafa taşınır ve a'ya bölünür:

$x<-\frac{b}{a}$ (veya $x\le -\frac{b}{a}$) Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.
Çözüm kümesi $\left(-\infty,\frac{-b}{a}\right)$ (veya $\left(-\infty,\frac{-b}{a}\right]$) aralığıdır.

3°. $ax+b>0$ (veya $ax+b\ge 0$) ve $a=0$ $a=0$ yerine yazılır.
$0\cdot x+b>0$ (veya $0\cdot x+b\ge 0$) Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.
Eğer $b>0$ (veya $b\ge 0$) ise eşitsizlik **özdeşliktir**.
Eğer $b\le 0$ (veya $b<0$) ise eşitsizlik **imkânsızdır**.

ÖRNEK 1

$\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$ Eşitsizliği çöz.

$\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$ Eşitsizliğin her iki tarafını EKOK (2, 3) = 6 ile çarpıyoruz.

$6\cdot\frac{x-3}{3}-6\cdot 1>6\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot 2$ Sadeleştiriyoruz.

$2(x-3)-6>3(x-1)-12$. Parantezlerden kurtuluyoruz.
$2x-6-6>3x-3-12$ Bilinmeyeni içeren tüm terimleri sol tarafa, tüm sabit terimleri sağ tarafa grupluyoruz.

$2x-3x>-3-12+6+6$ Benzer terimleri topluyoruz.

$-x>-3$ Her iki tarafı -1 sayısı ile çarpıyoruz.

$x<3$ Çözüm kümesi $(-\infty, 3)$ aralığıdır.

Çözüm kümesini sayı doğrusunda grafik olarak gösterebiliriz; eşitsizliğin çözümlerine karşılık gelen noktaların bulunduğu sayı doğrusu kısmı kalın şekilde çizilir (şekil 1).



Şekil 1

ÖRNEK 2

$(x-2)^2 - 3x \leq x(x-3)$ Eşitsizliği çöz:

$x^2 - 4x + 4 - 3x \leq x^2 - 3x$	Üs alıyoruz ve parantezlerden kurtuluyoruz.
	Bilinmeyenli ve sabit terimleri gruplayıp benzer terimleri topluyoruz.
$-4x \leq -4$	Eşitsizliğin iki yanını -4'e böleriz.
$x \geq 1$	Çözüm kümesi $[1, +\infty)$ aralığıdır.

Eşitsizliğin çözüm kümesi şekil 2'de grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2

SORU 1

Başlangıçtaki eşitsizliğin doğru çözümünü elde etmek için aşağıdaki eşitsizlikleri doğru sıraya diz. Bazıları doğru değildir. Yanlış eşitsizliklerin elde edilmesine yol açan hataları belirle.

$2x > 3$ $x > 1{,}5$	$2x > -15$ $x < 6$	$3(5x-3) > 13x-6$ $15x-9 > 13x-6$	$15x-6 > 13x-6$ $2x-9 > -6$

SORU 2

Monika'nın 300 denarı vardır ve toplam tutarı $15x + 30$ denar olan ürünler almak istiyor; burada x satın alınan ürün sayısıdır.
Monika en fazla kaç ürün satın almıştır?

ÖRNEK 3

m'in gerçek bir parametre olduğu, $mx - 5 > 3x - m$ eiitsizliğini çöz.

$mx - 5 > 3x - m$	Bilinmeyenli terimleri sol tarafa, sabit terimleri sağ tarafa topluyoruz.
$mx - 3x > 5 - m$	Elde edilen eşitsizlik verilen eşitsizliğe eşdeğerdir.
$(m-3)x > 5 - m$	Parametre m'nin değerlerine göre tartışmaya - değerlendirmeye başlanır:

Eğer $m-3>0$, yani $m>3$ ise, çözüm kümesi $\left(\frac{5-m}{m-3}, +\infty\right)$ aralığıdır.

Eğer $m-3<0$, yani $m<3$ ise, çözüm $\left(-\infty, \frac{5-m}{m-3}\right)$ aralığıdır.

✓ Eğer $m-3=0$, yani $m=3$ ise, eşitsizlik $0 \cdot x > 2$ biçimini alır.

Bu durumda eşitsizlik imkânsızdır ve çözüm kümesi boştur.

SORU 1

m'in gerçek bir parametre olduğu $2x-m<m-2$ parametreli eşitsizliği çöz.

Bir Bilinmeyenli Lineer Eşitsizliklerin Uygulanması

ÖRNEK 4

Şpati bir boks maçına hazırlanıyor ve vücut ağırlığını düşürmesi gerekiyor. Günlük en az 2000 kalori fazladan yakması gerekiyor.
Şpati günde 2750 kalori yakıyorsa, hedefe ulaşması için günde en fazla kaç kalori alabilir?

x, Şpati'nin günlük alması gereken kalori miktarı olsun. Sorudaki koşuldan $2750-x \geq 2000$ eşitsizliğini elde ederiz; bu da $x \leq 750$ ile eşdeğerdir.

Şpati günde en fazla 750 kalori almalıdır.

Kontrol: $2750-750 \geq 2000$

ÖRNEK 5

İrina, Mila'nın beşiğini boyamak istiyor. Boyanması gereken alan 180 kare desimetredir.
Bir kutu boya ile 50 kare desimetre alan boyanabiliyorsa, İrina en az kaç kutu boya satın almalıdır?

x, alınması gereken boya kutusu sayısı olsun. Koşuldan $50x \geq 180$ eşitsizliğini elde ederiz; bu da $x \geq 3{,}6$ ile eşdeğerdir.

Örnekte istenen çözüm, 3,6'dan büyük en küçük doğal sayı olan 4'tür.

İrina en az 4 kutu boya satın almalıdır.

Kontrol: $50 \cdot 4 \geq 180$.

ÖRNEK 6

Bir dron (uçangöz/drone) bataryasını dakikada %0,625 hızla tüketmektedir. Dron, bataryasının %60'ını tüketmeden önce inmek zorundadır. Dron en fazla kaç dakika uçabilir?

x, dron'un uçabileceği süre (dakika) olsun. Koşuldan $0{,}625\% \cdot x < 60\%$ eşitsizliğini elde ederiz; bu da $x < 96$ ile eşdeğerdir.

Verilen görevin çözümü, 96'dan küçük en büyük doğal sayıdır; yani 95.
Drone en fazla 95 dakika uçabilir.
Kontrol: $0{,}625\% \cdot 95 < 60\%$

ÖRNEK 7

Büyük evcil hayvan maması kutusu, küçük kutudan üç kat daha fazla porsiyon içerir. Onur hangi kutuyu alırsa alsın, önce kalitesi kontrolü için bir porsiyonu ayırır. Sonra, mamayı her gün birer porsiyon yiyen iki köpeğine böler. Büyük kutu, küçük kutunun gün sayısının iki katından 5 gün daha fazla yiyecek sağlar.
Küçük kutuda en az kaç porsiyon mama vardır?

Küçük kutudaki porsiyon sayısı x olsun. O hâlde büyük kutuda $3x$ porsiyon vardır.

Küçük kutunun sağladığı gün sayısı $\frac{x-1}{2}$, büyük kutunun sağladığı gün sayısı $\frac{3x-1}{2}$ olur.

Böylece şu lineer eşitsizliğe ulaşırız: $\frac{3x-1}{2} > 2 \cdot \frac{x-1}{2} + 5$ bu da $x > 9$ eşitsizliği ile eşdeğerdir.
Örneğin çözümü, 9'dan büyük en küçük doğal sayı olan 10'dur.
Küçük kutu en az 10 porsiyo9n içerir.
Kontrol: $\frac{3 \cdot 10 - 1}{2} > 2 \cdot \frac{10-1}{2} + 5$

SORU 1

Alabalık, balık çiftliğinde her ay kütlesine 35 gram ekler. Bir alabalık porsiyonunun büyüklüğü 300 gramdır.
Bir alabalığın bir porsiyon büyüklüğüne ulaşması için en az kaç ay gerekir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Eşitsizliklerin çözüm kümesini sayı doğrusunda göster:
   a) $x \geq 3$ b) $x \leq -4$ c) $x + 7 > 0$ d) $6x < 24$

2. Eşitsizlikleri çöz:
   a) $3x - 4 \geq 2 - x$ b) $5 - 2y < y + 8$ c) $x - (2 - x) \leq 3x + 7$

3. Eşitsizlikleri çöz:
   a) $(x-3)^2 \leq x(x+1)$ b) $\frac{x-5}{2} - 3 > \frac{3x-2}{6}$ c) $\frac{y}{2} - \frac{1-y}{4} > 5 - \frac{2+y}{3}$

4. Eşitsizlikleri çöz:
   a) $2x - 1 < \frac{8-x}{2}$ b) $\frac{4x-3}{2} > \frac{2-x}{3}$ c) $\frac{2}{3}(2z-1) - \frac{2}{5}z \leq 4$

5. Parametreli eşitsizlikleri çöz:
   a) $x + 3m \geq 9$, m gerçek parametredir b) $a^2x < ax - a^2x$, a gerçek parametredir

6. Dünya ile Ay arasındaki mesafe 384 400 kilometredir. Çin sondası Chang'e 6 Haziran 2024'te Ay'dan numune toplama misyonundaydı. Sondanın azami hızı 10,5 kilometre/saniye ise, Dünya'dan Ay'a ulaşmak için en kısa süre ne kadardır?

7. Nötrleşme tepkimesi baz ile asit arasında gerçekleşir. Otomobil akülerindeki tehlikeli asidin uzaklaştırılması sodyum hidroksit ile yapılır. Yeni bir otomobil aküsünde 600 gramdan daha az asit bulunur. 5 gram akü asidinin tam nötrleşmesi için 4 gram sodyum hidroksit gereklidir. Bir aküdeki akü asidinin tam nötrleşmesi için kaç gram sodyum hidroksit gereklidir?

8. Marija, elektrikli cezvedeki kireci sirke kullanarak gideriyor. Kireç tabakası 2 milimetre kalınlığında ve 8 000 milimetrekare yüzeyi kaplıyor. 1 santimetreküp kireci gidermek için 10 mililitre sirke gereklidir. Marija'nın en fazla kaç mililitre sirkeye ihtiyacı vardır?

9. Filip, her biri 25 kilogram olan 5 torba yapıştırıcıyı 20 metre yüksekliğe çıkarmalıdır. Torbaları taşımak için Filip'in yapacağı en az iş kaç joule'dür? Yapılan iş denklemi $A = F \cdot s$ olup burada A yapılan iş, $F = m \cdot g$ torbaların ağırlığı (m torbanın kütlesi, g yerçekimi ivmesi, $g = 10$ metre/saniye^2) ve s ise alınan yoldur.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR

1. Koordinat düzleminde noktayı göster:
   a) $A(-2, 4)$ b) $B(5, 4)$ c) $C(0,3)$ d) $D(5, 0)$
   e) $E(-6, 0)$ f) $F(-2, -3)$ g) $G(1, -3)$ h) $H(0, -1)$
   ve hangi bölgede (kadranda) ya da hangi eksen üzerinde olduklarını belirle.

2. $T(0, -2)$, $U(1, 3)$, $V(6, 4)$, $W(5, -1)$ noktalarını koordinat düzleminde göster ve $TUVW$ dörtgeninin bir eşkenar dörtgen (romb) olup olmadığını kontrol et.

3. Üçgen ABC'nin köşeleri
   a) $A(1, 1)$, $B(5, 1)$ ve $C(5, 7)$ b) $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ ve $C(5, 5)$.
   Üçgen ABC'nin dik üçgen olup olmadığını belirle, ardından çevresini hesapla.

4. Eşit kütleli iki parçacık $(1, 3)$ ve $(7, 9)$ noktalarında bulunmaktadır. Kütle merkezinin koordinatlarını bulun.

5. $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$ ve $D(1, 5)$ noktaları bir paralelkenarın köşeleridir. A_1, B_1, C_1 ve D_1 sırasıyla AB, BC, CD ve DA kenarlarının orta noktaları olmak üzere, $A_1B_1C_1D$ paralelkenarının alanını hesaplayın.

6. Ana bir mobil uygulama yaptı. İlk gün uygulama 40 kullanıcı tarafından indirildi ve sonraki her gün 25 yeni kullanıcı tarafından indiriliyor.
   a) İndirme sayısını zamana bağlı olarak tanımlayan fonksiyonu yaz.
   b) Fonksiyonun gidişini incele ve grafiğini şekil olarak göster.

7. İki otomobil A noktasından B noktasına, aralarındaki 400 metrelik mesafe boyunca hareket etmektedir. Birinci otomobil, saniyede 20 metre sabit hızla düzgün hareket eder. İkinci otomobil A noktasından durgun hâlden başlayıp saniyede 2 metre kare sabit ivme ile düzgün ivmelenmiş hareket yapar.

   a) Birinci otomobilin aldığı yolu belirleyen fonksiyonu yaz.

   b) İkinci otomobilin aldığı yolu belirleyen fonksiyonu yazı.

   v) Her iki fonksiyonun grafiğini aynı koordinat sisteminde çiziniz. Ne gözlemliyorsun?

   g) A ile B noktaları arasındaki yolu katetmek için birinci otomobile ne kadar, ikinci otomobile ne kadar süre gerekir?

8. Bir radyoaktif maddenin kütlesi 100 gramdır. Her yıl kütlesi %75 oranında azalır.

   a) 5 yıl sonra madde miktarını bul.

   b) Zaman (yıl) cinsinden madde miktarını modelleyen fonksiyonu yaz.

   v) Yıla göre madde miktarının grafiğini çiz.

Denklemleri çöz:

9. a) $7(x-3)=4(x+5)-47$

   b) $16-9(3-u)+4u=15$

   c) $(w-1)(w-2)=(w+3)(w-4)-3(w-1)$

10. a) $\frac{4y-3}{y+2}=\frac{7y-2}{y-5}-3$ b) $\frac{7}{x-1}=\frac{9}{x-2}-\frac{2}{x-3}$ c) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)$

11. Parametreli denklemi çöz:

    a) $ax-bx=b-ax$ b) $(y-a)(y-b)=y^2-a^2$ c) $\frac{ax-b}{b}-\frac{bx-a}{a}=a-b$

12. Bir laboratuvarda başlangıçta 500 litre temiz su içeren bir su deposu vardır. Laboratuvar her saat deneyler için 35 litre su tüketmektedir. Depoda yalnızca 290 litre su kalması için kaç saat geçmelidir?

13. Üç boru, tek başına çalıştıklarında bir havuzu sırasıyla 10, 12 ve 15 saatte doldurabilmektedir. Birlikte çalışırlarsa havuzu kaç saatte doldururlar?

14. $2x-7y=c$ doğrusal denkleminin grafiği $B(1,-1)$ noktasından geçecek şekilde c parametresinin değerini bul.

15. Eşdeğer dönüşümler kullanarak $\frac{x+5}{3}-\frac{y+3}{5}-1=0$ denklemini, genel biçime getir ve ardından çözüm kümesini yaz.

16. $5(x-y)+2=3x-2y+1$ denkleminin çözüm kümesinde x=2ykoşulunu sağlayan çözümü bul.

17. İki bilinmeyenli iki lineer denklemden oluşan sistemi grafiksel olarak çöz:

    a) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+6y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 5x+12y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

18. İki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini yerine koyma yöntemiyle çözünüz:

    a) $\begin{cases} (2x-3):(y+5)=3:4 \\ (5x-4):(3y+1)=5:2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=-3 \\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+a=by \\ x+b=ay \end{cases}$, a ve b gerçek parametrelerdir

19. İki bilinmeyenli iki lineer denklem sistemini zıt katsayılar yöntemiyle çözünüz:

a) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}=x+y \\ \frac{7x-2}{6}+\frac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$ b) $\begin{cases} a(x+y)-b(x-y)=2a^2 \\ (a^2-b^2)(x-y)=4a^2b \end{cases}$, a ve b gerçel parametrelerdir

20. Bir ikizkenar üçgende tepe açısı tabandaki açıdan dört kat daha küçüktür. Üçgendeki açıların büyüklüklerini hesaplayınız.

21. Dört arkadaş bir futbol topu almak istiyor. Birincisi toplam bedelin yarısını vermiştir, ikincisi kalan üç kişinin toplamının üçte birini, üçüncüsü kalan üç kişinin toplamının dörtte birini ve dördüncüsü 50 denar vermiştir. Topun fiyatı kaç denardır?

22. 8 litre sıcak suya 2 litre daha soğuk su eklendiğinde 66 °C elde ediliyor; 7 litre sıcak suya 3 litre daha soğuk su eklendiğinde 59 °C elde ediliyor. Sıcak suyun ve daha soğuk suyun sıcaklıkları kaç °C'dir?

23. Bir uçak, uygun rüzgârla Üsküp–Milano arası 1072 km'yi 4 saatte, ters rüzgârla Milano–Berlin arası 848 km'yi aynı hızla yine 4 saatte kat ediyor. Uçağın hızı ve rüzgârın hızı nedir?

24. Tiyana, vapurla ulaşım için iki yetişkin ve üç çocuk bileti almış ve toplam 8800 denar ödemiştir. Blerim aynı vapur için üç yetişkin ve iki çocuk bileti almış ve toplam 9700 denar ödemiştir. Yetişkin ve çocuk biletlerinin fiyatları kaç denardır?

25. Eşitsizlikleri çözünüz:

a) $3(x-3)+2<6x-1$ b) $\frac{4x-3}{6}\le\frac{x-1}{2}$ c) $\frac{7x-8}{3}\ge\frac{1-x}{4}$

d) $\frac{x+3}{3}-\frac{3x+1}{2}>0$ e) $\frac{1-x}{2}+\frac{3-x}{4}<2$ f) $2m-3x<mx+4$, m gerçek parametre

26. Marko'nun 700 denarı vardır. Bir pastaneden tanesi 55 denar olan pastalardan en fazla kaç tane alabilir?

27. Stobi antik yerleşimindeki sülün mozaiği 160 cm uzunluk ve 75 cm genişliktedir. En büyük parça 3 cm^2, en küçük parça 1,5 cm^2 ise, mozaiğin içerdiği en az ve en çok parça sayısı kaçtır?

28. Bir akıllı telefon, boyutu 48 megabayt olan fotoğraflar çekmektedir. Telefonun belleği 6 gigabayttır. Telefona kaydedilebilecek en fazla fotoğraf sayısı kaçtır?

Konu 4:

GEOMETRİ

Bu konuyu öğrenirken şunları yapabileceksin:

1. Bilgilerini STEM problemlerini çözmek için kullanmak;
2. Sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant bilgilerini gerçek bağlamdaki problemleri çözmede uygulamak;
3. 2D şekillerin özelliklerini problemleri çözmede kullanmak;
4. Benzerlik konusundaki soruları gerçek durumlarda çözmek.

4.1. Vektör. Vektörün Doğrultusu, Yönü Ve Büyüklüğü

Şekil 1'de düzlemde p doğrusu ve bu doğru üzerinde yatan üç farklı A, B ve C noktası verilmiştir. Düşün ve aşağıdaki ifadelerden hangilerinin doğru olduğunu belirle:

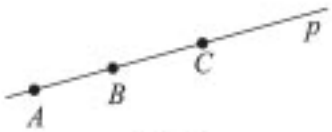
a) B noktası p doğrusunu iki yarı-doğruya ayırır

b) BA ve BC yarı-doğruları zıt yöndedir

c) BA ve AC yarı-doğruları zıt yöndedir

d) AC ve BC yarı-doğruları aynı yöndedir

e) AB ve BC yarı-doğruları aynı yöndedir



Şekil 1

Aynı doğru üzerinde (yani aynı doğrunun altkümeleri olan) iki yarı-doğruyu ele alalım; başka bir deyişle, doğrultuları aynıdır. Eğer yarı-doğrulardan biri diğerinin altkümesi ise, yarı-doğruların aynı yönde olduğunu söyleriz. Aksi halde, onların zıt yönde olduğunu söyleriz.

SORU 1

Doğru p (Şekil 1) üzerindeki A, B ve C noktalarını uç noktalar olarak kullanarak elde edilen tüm doğru parçalarını yaz. Sayılarını belirle.

SORU 2

Doğru p (Şekil 1) üzerindeki A, B ve C noktalarını uç noktalar olarak kullanarak elde edilen tüm yönlü doğru parçalarını (yönlü kesitleri) yaz. Sayılarını belirle ve Soru 1'den elde edilen sayı ile karşılaştır.

Vektör derken yönlü bir doğru parçasını, yani uç noktalarından birinin başlangıç, diğerinin bitiş olarak alındığı bir doğru parçasını anlayacağız. Yönlü doğru parçasının uç noktaları A ve B noktaları ise ve yön A'dan B'ye doğruysa, ilgili vektörü $\overrightarrow{AB}$ ya da $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ şeklinde yazarız (Şekil 2).



Şekil 2

SORU 3

Dört farklı nokta A, B, C ve D verilmiştir. Bu noktalarla elde edilebilecek tüm vektörleri yaz.

Her vektör $\overrightarrow{AB}$ şu şekilde tanımlanır:

- **Büyüklüğü**, AB doğru parçasının uzunluğuna eşittir (yani $\overline{AB}$),
- **Doğrultusu**, AB doğrusu ile belirlenir,
- **Yönü**, A noktasından B noktasına doğrudur (yani AB yarı-doğrusunun yönü).

Vektörün büyüklüğüne ayrıca vektörün uzunluğu (şiddeti veya modülü) de denir.
Gösterim: $|\overrightarrow{AB}|$ veya $|\vec{a}|$.

Uzunluğu 1 olan vektöre **birim vektör** denir.
Uzunluğu 0 olan vektöre ise **sıfır vektör** denir.

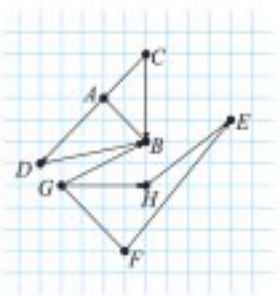
SORU 4

Vektör $\vec{d}$ \vec{a}a aşağıdaki şekilde çiz:
a) $|\vec{d}| = 3$ cm, b) $|\vec{d}| = 1$ cm, c) $|\vec{d}| = 0$ cm.

ALIŞTIRMA SORULARI

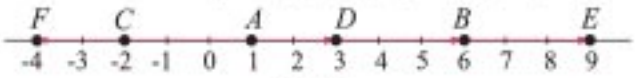
1. Şekil 3'te gördüğün tüm doğru parçalarını ve vektörleri yaz.

2. Kareli şemayı kullanarak, şemadaki her küçük karenin kenar uzunluğunun 1 cm olduğunu kabul ederek, Soru 1'deki tüm doğru parçaları ve vektörlerin uzunluklarını belirle.



Şekil 3

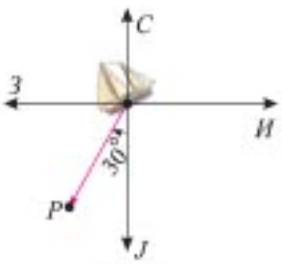
3. Sayı doğrusunda, Şekil 4'teki gibi noktalar seçilmiştir. Aşağıdakilerin uzunluklarını belirle: a) $\overrightarrow{AD}$, b) $\overrightarrow{CF}$, c) $\overrightarrow{BE}$, ç) $\overrightarrow{DB}$, d) $\overrightarrow{AB}$ ve e) $\overrightarrow{FE}$.



Şekil 4

4. Verilen her büyüklük için vektörel olup olmadığını belirle
a) 10 km/h, b) 10 N, c) 50 m/s güneye doğru, d) 15 g/cm³.

5. Eğer yönleri Şekil 5'teki gibi gösterirsen, geminin rotasındaki değişimi 300° güneybatı için nasıl ifade edersin?



Şekil 5

ARAŞTIRMA

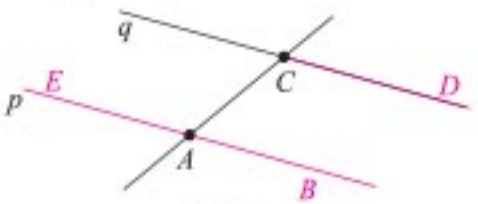
Yanında oturan arkadaşınla birlikte, aynı uzunlukta bir ip yardımıyla hafif bir cisim bağlayın ve sıranın üzerine koyun. Önce herkes tek başına cismi çeksin. Ne gözlemliyorsun? Daha sonra aynı anda cismi çekmeye başlayın. Ne gözlemliyorsun? Cismin hareketi farklı mı? Neden?

Vektörel büyüklüklere örnekler ver ve bunların vektörler yardımıyla nasıl gösterileceğini çizmeye çalış.

4.2. Eş Ve Zıt Vektörler. Kolinear Vektörler

Şekil 1'de iki paralel doğru p ve q verilmiştir. Başlangıç noktaları A ve C olan AB, CD ve AE yarı-doğrularını incele. Düşün ve aşağıdaki ifadelerden hangilerinin doğru olduğunu belirle:

a) AC doğrusu düzlemi iki yarı-düzleme ayırır
b) AB ve CD yarı-doğruları aynı yarı-düzlemde yatar
c) AE ve CD yarı-doğruları farklı yarı-düzlemlerde yatar
d) AB ve CD yarı-doğruları aynı doğrultudadır
e) AE ve CD yarı-doğruları aynı doğrultudadır



Şekil 1

İki paralel doğru üzerinde iki yarı-doğru verilmiş olsun. Eğer her iki yarı-doğru aynı yarı-düzlemin altkümesi ise, bu iki yarı-doğrunun aynı yönde olduğunu söyleriz. Aksi halde, zıt yönde olduklarını söyleriz.

Yön yalnızca yarı-doğrular aynı doğrultuya sahipse tanımlanır.

Aynı doğrultuya sahip vektörlere kolinear vektörler denir.

Sıfır vektörü her vektörle aynı doğrultuya ve aynı yöne sahiptir.

İki vektör $\vec{AB}$ ve $\vec{DC}$'nin:

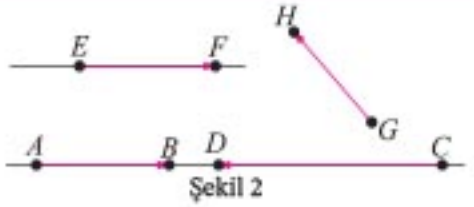
- aynı büyüklüğe sahip olması için $\overline{AB} = \overline{CD}$ olmalı ve $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ yazılır,
- aynı doğrultuya sahip olması için AB ve CD doğruları paralel olmalı ve $\vec{AB} \| \vec{CD}$ yazılır,
- aynı yöne sahip olması için AB ve CD yarı-doğruları aynı yönde olmalı ve $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$ yazılır,
- zıt yönlere sahip olması için AB ve CD yarı-doğruları zıt yönde olmalı ve $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$ yazılır.

İki vektör $\vec{AB}$ ve $\vec{CD}$, aynı büyüklüğe, aynı doğrultuya ve aynı yöne sahipse eşit vektörlerdir $(\vec{AB} = \vec{CD})$.

İki vektör $\vec{AB}$ ve $\vec{CD}$, aynı büyüklüğe, aynı doğrultuya ve zıt yönlere sahipse zıt vektörlerdir $(\vec{AB} = -\vec{CD})$.

ÖRNEK 1

Şekil 2'de iki paralel doğru verilmiştir.
Vektörler $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{EF}$ birbirleriyle kollineerdir,
fakat vektör $\overrightarrow{GH}$ bunlardan hiçbiriyle kollineer değildir.
Vektörler $\overrightarrow{EF}$ ve $\overrightarrow{CD}$ zıt yönlüdür,
ancak birbirinin zıt vektörleri değildir.



Şekil 2

SORU 1

Şekil 3'te vektörler verilmiştir. Aşağıdakileri belirle:

a) Hangi vektör en büyük uzunluğa sahiptir,

b) Hangi vektör en küçük uzunluğa sahiptir,

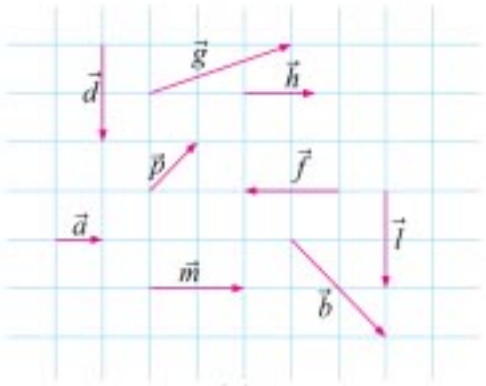
c) Hangi vektörler birim vektördür,

d) Hangi vektörlerin uzunluğu 2'dir,

e) Hangi vektörler kollineerdir,

f) Hangi vektörler eşittir,

g) Hangi vektörler zıttır.



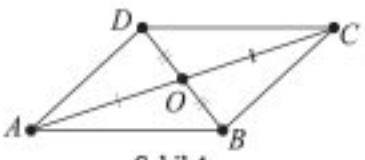
Şekil 3

SORU 2

ABCD bir paralelogram ve O onun köşegenlerinin kesişim noktasıdır (Şekil 4). Aşağıdaki vektör çiftlerini göster ve karşılıklı ilişkilerini belirle:

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$

d) $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$



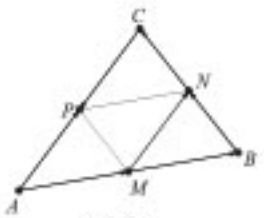
Şekil 4

ALIŞTIRMA SORULARI

1. ABC bir üçgen olsun ve M, N, P sırasıyla AB, BC, CA kenarlarının orta noktaları olsun (Şekil 5). Aşağıdaki eşitliklerden hangileri doğrudur?

   a) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$, b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BN}$, c) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$,

   d) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN}$, e) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$?

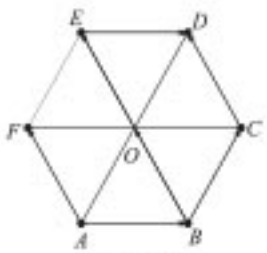


Şekil 5

2. ABCDEF düzgün altıgen olsun ve O çevrel çemberin merkezi olsun (Şekil 6). Aşağıdaki eşitliklerden hangileri doğrudur?

   a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$,

   c) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OE}$, d) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE}$?

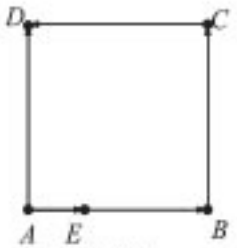


Şekil 6

3. Kare ABCD'nin kenarları üzerinde birkaç vektör verilmiştir (Şekil 7). Aşağıdakilerden hangileri olduklarını belirt:

a) kollineer, b) aynı yönlü,

c) eşit, d) zıt.



Şekil 7

4. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur:

a) Eğer iki vektör kollineerse, o zaman onlar eşittir,

b) Eğer iki vektör eşitse, o zaman onlar kollineerdir,

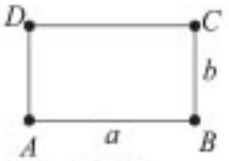
c) Eğer iki vektör kollineer ve eşit uzunlukta ise, o zaman onlar eşittir,

d) Eğer iki vektör aynı yöne ve eşit uzunluğa sahipse, o zaman onlar eşittir.

5. $a = 2$ cm ve $b = 1$ cm kenar uzunluklarına sahip bir dikdörtgen verilmiştir (Şekil 8). Dikdörtgenin kenarlarında aşağıdaki vektörleri göster:

a) $\overrightarrow{BC}$'ye eşit olanlar, b) $\overrightarrow{AD}$'ye zıt olanlar,

c) $\overrightarrow{AB}$'ye eşit olanlar, d) $\overrightarrow{CD}$'ye zıt olanlar, e) Birim vektörler.



Şekil 8

ARAŞTIRMA

Kenar uzunluğu 2 cm olan bir kare ABCD çiz. Kenarları ve köşegenleri üzerinde tüm vektörleri göster. Aşağıdaki vektör çiftlerini yaz:

a) eşit, b) zıt, c) kollineer.

Daha sonra elde ettiğin cevapları geometrik yazılım yardımıyla kontrol et.

4.3. Vektörlerle İşlemler

Vektörlerin Toplanması

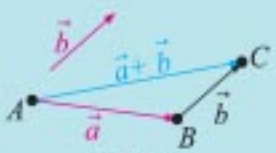
$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ düzlemde rastgele iki kollineer olmayan vektör olsun ve $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

B noktasından geçen ve $\vec{b}$ vektörünün belirlediği doğruya paralel olan bir doğru çiz.

$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektörünü $\vec{b}$ olarak göster. Bu şekilde her zaman ardışık (uç uca eklenmiş) vektörler elde edilebilir.

İki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ 'nin toplamı $\overrightarrow{AC}$ vektörü olarak adlandırılır Yani, toplam vektörün başlangıcı $\vec{a}$ 'nin başlangıç noktası, sonu ise $\vec{b}$'nin bitiş noktasıdır. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$'nin toplamı $\vec{a} + \vec{b}$ ile gösterilir, yani $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Şekil 1).

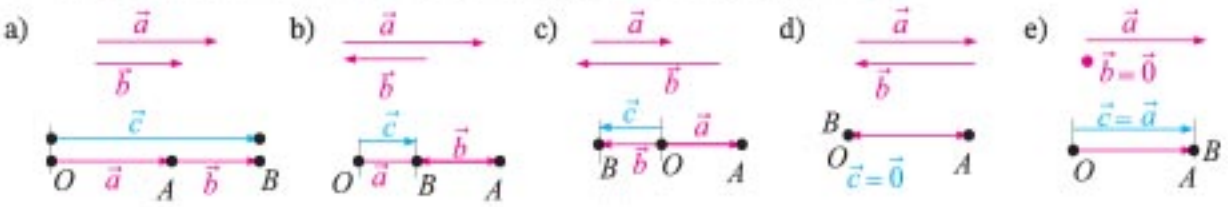
Bu vektörlerin toplanma yöntemi **üçgen kuralı** olarak adlandırılır.



Şekil 1

İki kollineer vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ verilmiş olsun. Aşağıdaki durumlar mümkündür (Şekil 2):

1. Aynı yöndedirler; bu durumda toplamları, uzunluğu iki vektörün uzunluklarının toplamına eşit olan ve yönü vektörlerin yönüyle aynı olan bir vektördür (Şekil 2a).
2. Zıt yöndedirler ve uzunlukları farklıdır; bu durumda toplamları, uzunluğu büyük vektör ile küçük vektörün uzunluklarının farkına eşit olan ve yönü daha uzun vektörün yönüyle aynı olan bir vektördür (Şekil 2b ve 2c).
3. Zıt vektörlerdir; bu durumda toplamları sıfır vektördür (Şekil 2d).
4. Vektörlerden biri sıfır vektör ise, toplam diğer vektöre eşittir (Şekil 2e).



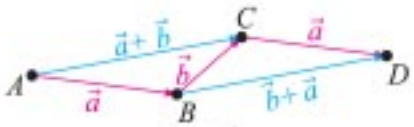
Şekil 2

ETKİNLİK

İki kollineer olmayan vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ seç. $\vec{b}$ vektörünü $\vec{a}$ vektörüne ekle ve tersine, $\vec{a}$ vektörünü $\vec{b}$ vektörüne ekle. Ne gözlemledin, açıkla!

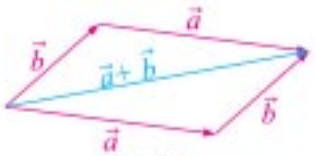
Her vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ için $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ geçerlidir, yani vektörlerin toplanmasında değişme (komütatif) özelliği geçerlidir.

Gerçekten, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ve $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ vektörleri verilsin (Şekil 3). Toplam $\vec{b}+\vec{a}$'yı, $\vec{b}$'nin sonu ile $\vec{a}$'nin başlangıcı çakışacak şekilde elde ederiz, yani $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{BD}$. O hâlde $\overline{AB}=\overline{CD}$ ve AB ile CD paraleldir, dolayısıyla ABDC bir paralelgramdır. Demek ki $\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{BD}$ vektörleri aynı büyüklüğe ve aynı doğrultuya sahiptir. Ayrıca AC ve BD yarı-doğruları AB doğrusu ile belirlenen aynı yarı-düzlemde yattığından $\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{BD}$ vektörleri aynı yöndedir. Buradan $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{a}$ sonucu çıkar.



Şekil 3

Not: Önceki yöntem, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin toplamının bu vektörler üzerine bir paralelogram inşa edilerek bulunmasını sağlar. Bu yönteme **paralelogram kuralı** denir (Şekil 4).

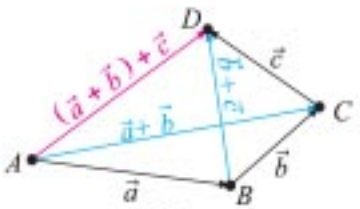


Şekil 4

Şimdi üç vektör ardışık olsun, yani $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ ve $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ (Şekil 5).
O hâlde: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ ve $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$. Bu da şu özelliğin geçerli olduğunu gösterir: Vektörlerin toplanmasında birleşme (assosiatif) özelliği geçerlidir.

Her vektör $\vec{a}, \vec{b}$ ve $\vec{c}$ için $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ geçerlidir, yani vektörlerin toplanmasında birleşme (assosiatif) yasası geçerlidir.

Eğer $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ve $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$ ise, o hâlde $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$
yani şu özellik geçerlidir:
Bir vektör ile sıfır vektörünün toplamı aynı vektördür.



Şekil 5

Her vektör $\vec{a}$ için şu geçerlidir: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Eğer $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ise, o hâlde $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, dolayısıyla $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
Buna göre şu özellik geçerlidir: Her vektörün tersiyle toplamı sıfır vektördür.

Her vektör $\vec{a}$ için şu geçerlidir: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

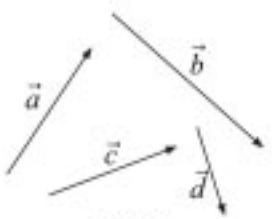
ÖRNEK 1

A, B ve C düzlemde üç nokta olsun.

Vektör $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ sıfır vektördür, çünkü üçgen kuralına göre:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

SORU 1

Defterine Şekil 6'daki verilen vektörleri yeniden çiz, uç uca ekle ve üçgen kuralını kullanarak toplamlarını belirle.

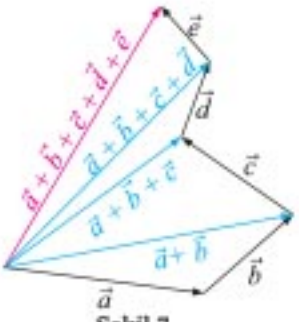


Şekil 6

ETKİNLİK

Bir geometri yazılımı seç, Soru 1'dekine benzer vektörler çiz ve üçgen kuralını uygulamayı dene; her denemede toplananların sırasını değiştir.

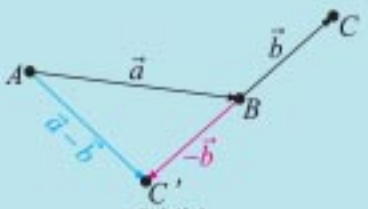
Genel olarak, n vektörünün toplanmasında, burada n bir doğal sayı olmak üzere, **çokgen kuralı** kullanılır. Vektörler birbirine "eklenir" (yeni vektörün başlangıcı, bir öncekinin bitimindedir) ve bunların toplamı, başlangıcı ilk vektörün başlangıcında, bitimi ise son vektörün bitiminde olan vektördür (şekil 7). Yani, önce ilk iki vektörün toplamı elde edilir, sonra bu vektör üçüncü vektörle toplanır ve böyle devam eder.



Şekil 7

Vektörlerin Çıkarılması

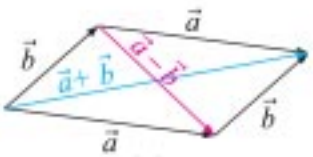
Eğer $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ rastgele vektörler ise, (çizim 8) $\vec{a}-\vec{b}$ farkı şu şekilde tanımlanır:
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$



Şekil 8

Bu, vektörlerin çıkarılmasının bir vektör ile diğerinin zıt vektörünün toplanması anlamına geldiğini gösterir. Buna göre şu eşitlik geçerlidir: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}$
Ayrıca: düzlemdeki rastgele A, B ve C noktaları için.

Eğer $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine bir paralelkenar inşa edilirse, o zaman $\vec{a}+\vec{b}$ vektörü, bu vektörlerin ortak başlangıç noktasından geçen köşegen üzerinde yer alır; $\vec{a}-\vec{b}$ vektörü ise diğer köşegen üzerinde bulunur (Şekil 9).

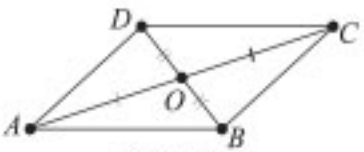


Şekil 9

SORU 2

ABCD bir paralelkenar olsun ve O, köşegenlerinin kesişim noktası olsun (Şekil 10). Aşağıdaki ifadeleri sadeleştir:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$,
b) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$,
c) $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OC}$,
d) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\right)+\overrightarrow{OA}$,
e) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$,
f) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BO}$



Şekil 10

Vektör Ile Sayı (Skaler) Çarpımı

$\vec{a}$ bir vektör ve k bir skaler (gerçel sayı) olsun. $k\vec{a}$ vektörü, $\vec{a}$ ile aynı doğrultuya sahip, uzunluğu $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$ olan bir vektördür. Eğer $k>0$ ise, $k\vec{a}$ ve $\vec{a}$ vektörleri aynı yönlüdür; eğer $k<0$ ise, $k\vec{a}$ ve $\vec{a}$ vektörleri zıt yönlüdür, şekil 11.



Şekil 11

Vektör $k\vec{a}$, vektör $\vec{a}$ ile skaler k'nin **çarpımı** olarak adlandırılır.

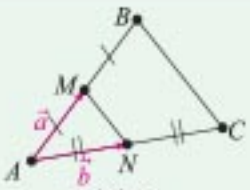
Bir vektörün skaler ile çarpımı için şu özellikler geçerlidir:

Her vektör $\vec{a}$ ve skaler k için: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, k \cdot \vec{0} = \vec{0}, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
Her skaler k ve m ile vektör $\vec{a}$ için: $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ ve $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$.
Her skaler k ve vektörler $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ için: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
Sıfırdan farklı $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri, ancak ve ancak $k \neq 0$ olan bir skaler mevcutsa ve $\vec{a} = k\vec{b}$ şeklinde yazılabiliyorsa kolineerdir. Eğer $k \neq 0$ ise, $\frac{\vec{a}}{k}$ vektörünü $\frac{1}{k}\vec{a}$ olarak göstereceğiz. Yani $\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k}\vec{a}$.

ÖRNEK 2

Şekil 12'de, $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ ve $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ vektörleri verilmiştir; öyle ki $\overline{AM} = \overline{MB}$ ve $\overline{AN} = \overline{NC}$.
$\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ vektörlerini $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri cinsinden ifade edeceğiz.

$\overrightarrow{BM}$ için: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\vec{a}$, benzer şekilde $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$.
Şekil 12'de, üçgen kuralına göre: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$, veya
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$ vektör farkı kullanılırsa:
$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{a} + \vec{b}$



Şekil 12

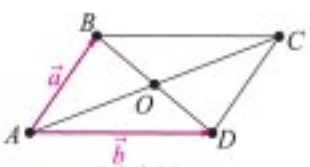
ÖRNEK 3

Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz:
a) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$, b) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a})$

Vektörün skalerle çarpımının özelliklerini uygulayarak:
a) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 3\vec{a} + 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$,
b) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c} + 4\vec{b} + 5\vec{c} - 5\vec{a} = -3\vec{a} + 11\vec{c}$.

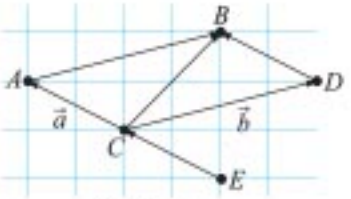
ALIŞTIRMA SORULARI

1. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$ ve $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ vektörlerini, şekil 13'teki ABCD paralelkenarı için $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri yardımıyla ifade et.



Şekil 13

2. $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ve $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ olsun. Şekil 14'e göre, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ yardımıyla şu vektörleri ifade et: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{ED}$.



Şekil 14

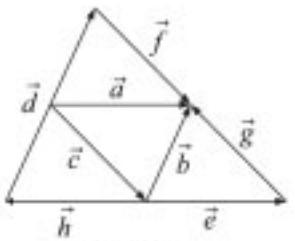
3. Düzenli altıgen ABCDEF verilmiş, O çevrel çemberin merkezi olsun. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ve $\overrightarrow{AF} = \vec{a}$ olsun. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ yardımıyla şu vektörleri ifade et: $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CE}$ ve $\overrightarrow{CF}$.

4. Paralelkenar ABCD'nin köşegenleri S noktasında kesişmektedir. Aşağıdaki eşitliklerin geçerli olup olmadığını kontrol et:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$, b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$, c) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$.

5. İfadeyi sadeleştir: $2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) - 5\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + 2\vec{a} + 6\vec{b}$.

6. Eğer $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ eşitliği geçerliyse, A, B ve C noktaları hangi konumda bulunur?

7. Üçgen kuralı yardımıyla şu vektörlerin toplamını bul (Şekil 15): $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h}$.



Şekil 15

ARAŞTIRMA

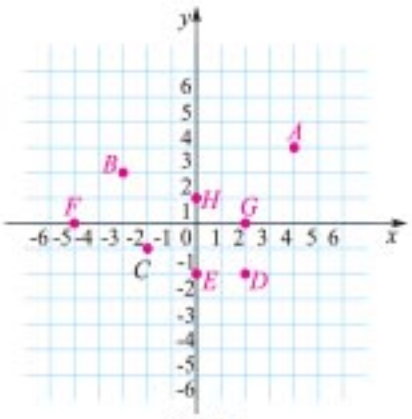
Geometrik bir yazılımda rastgele bir dışbükey dörtgen ABCD çiz. AB, BC, CD ve DA kenarlarının orta noktalarını sırasıyla M, N, P ve Q ile göster. $\overrightarrow{MN}$ ve $\overrightarrow{QP}$, ayrıca $\overrightarrow{MQ}$ ve $\overrightarrow{NP}$ vektör çiftlerini incele. Dörtgen MNPQ hakkında ne söyleyebilirsin?

4.4. Vektörün Koordinatları

ETKİNLİK

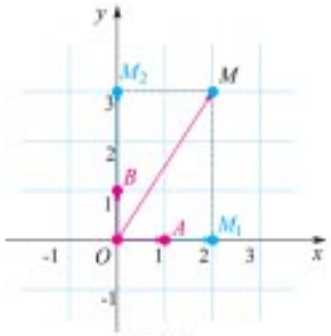
Şekil 1'deki koordinat sisteminde verilen A, B, C, D, E, F, G ve H noktalarının koordinatlarını bul.

ŞEKİL 1



Şekil 1

Bir koordinat sistemi verilmiş olsun ve noktalar A(1,0), B(0,1). $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{OB}$ vektörleri, koordinat eksenleri boyunca birim vektörlerdir; burada O(0,0) koordinat başlangıcıdır (Şekil 2). M(2,3) noktası da verilmiş olsun. Vektörlerin toplanması ve vektörün skalerle çarpımı işlemleri yardımıyla şu elde edilir:
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.



Şekil 2

Genel olarak, M(x,y) koordinat sisteminde bir nokta ise, o zaman: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ burada A(1,0), B(0,1) ve O(0,0) koordinat başlangıcıdır.
Daha genel olarak, $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ ve $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ olsun. O hâlde: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, yani $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.
Burada $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ vektörleri, koordinat sisteminin birim vektörleri olarak adlandırılır.

Koordinat başlangıcından başlayan her vektör, nokta **M'nin yarıçap vektörü** veya **M'nin konum vektörü** olarak adlandırılır.

SORU 1

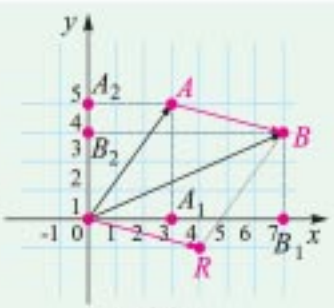
Şekil 1'deki noktaların koordinatlarına göre $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OG}$ ve $\overrightarrow{OH}$ vektörlerini yaz, sonra bunların uzunluklarını bul.

Eğer M(x,y) koordinat düzleminde bir nokta ise, o zaman: $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ÖRNEK 1

Koordinat sisteminde A(3,4) ve B(7,3) noktaları verilmiştir (Şekil 3).

$\overrightarrow{AB}$ vektörünün koordinatlarını bulmamız gerekiyor.
Şöyle ki: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ve $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ yani:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - (3\vec{i} + 4\vec{j}) = (7-3)\vec{i} + (3-4)\vec{j}$
demek ki: $\overrightarrow{AB} = (7-3, 3-4) = (4, -1)$. Onun uzunluğu ise:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
R(4, −1) noktası, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AB}$ yarıçap vektörünü belirler.



Şekil 3

Buna göre, $\overrightarrow{OR}$ vektörü, $\overrightarrow{AB}$'nin **konum vektörü** olarak adlandırılır.

Eğer $M(x_1, y_1)$ ve $N(x_2, y_2)$ koordinat sisteminde iki nokta ise, o zaman:
$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ve onun uzunluğu: $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Bu şekilde, uç noktaları A ve B koordinatlarla verilmiş her $\overrightarrow{AB}$ vektörü koordinatlarla yazılabilir ve $\overrightarrow{AB}$'nin konum vektörü $\overrightarrow{OR}$ bulunabilir.

ÖRNEK 2

P (−3, −5), Q (7, −8) olsun. $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün konum vektörünü bul.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} = (7-(-3), -8-(-5)) = (10, -3)$

SORU 2

Eğer $\overrightarrow{OA} = (3,5)$ ve $\overrightarrow{AB} = (1,7)$ is $\overrightarrow{OB}$ vektörünü bul.

İki vektör $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2)$ eşittir, yani $\vec{a} = \vec{b}$, ancak ve ancak $a_1 = b_1$ ve $a_2 = b_2$ ise.

ÖRNEK 3

$\vec{a} = (k + m, 11)$ ve $\vec{b} = (3, k - m)$ olsun ve $\vec{a} = \vec{b}$.

O hâlde: $\begin{cases} k + m = 3 \\ k - m = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 \\ m = -4 \end{cases}$.

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2)$ olsun, k ise bir reel sayı (skaler) olsun. O zaman:
$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ ve $k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$.

Not: Vektörler koordinatlarla verildiğinde, toplama, çıkarma ve skalerle çarpma işlemleri için aynı özellikler geçerlidir; tıpkı vektörler geometrik olarak verildiğinde olduğu gibi.

SORU 3

A(3, −5), B(12, 5) ve C(−1, 7) olsun. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ vektörlerini ve $3 \cdot \overrightarrow{BC} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}$ ifadesini bul.

ÖRNEK 4

$P(k,-1)$, $Q(2,4)$ ve $R(5,3k)$ olsun. Eğer $\left|\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\right| = 5$ ise, k'nın değerini bul.

$\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} = (3, 3k-4)$ olduğu için $\sqrt{3^2 + (3k-4)^2} = 5$ yani. $9 + (3k-4)^2 = 25$

Verilen koşula göre: $(3k-4)^2 = 16$, oradan $3k-4 = 4$ veya $3k-4 = -4$. Buradan da: $k = \frac{8}{3}$ ya da $k = 0$ elde edilir

ALIŞTIRMA SORULARI

1. $\overrightarrow{OA} = -5\vec{i} + 3\vec{j}$ ve $\overrightarrow{AB} = 7\vec{i} - \vec{j}$ $\overrightarrow{OB}$.vektörünü bul.
2. $\overrightarrow{BA} = (2,-3)$ ve $\overrightarrow{BC} = (-3,1)$ olsun. $\overrightarrow{AC}$ vektörünü bul.
3. $\overrightarrow{OP} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} - 6\vec{j}$ ve $\overrightarrow{OR} = \vec{i} - \vec{j}$. olsun. P, Q ve R noktalarının aynı doğru üzerinde olup olmadığını kontrol et.
4. $\vec{a} = 2\vec{i} + k\vec{j}$ ve $\vec{b} = (m, -5)$. olsun. Eğe $2\vec{a} + \vec{b} = 8\vec{i} - 3\vec{j}$ ise, k ve m'nin değerlerini bul.

ARAŞTIRMA

Bir geometrik yazılım kullan. İki nokta A ve B seç, sonra koordinatları $\overrightarrow{AB}$ vektörünün koordinatlarına eşit olan C noktasını çiz. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{OC}$ vektörlerini gözlemle. Onlar hakkında ne fark ettiğini yaz. İşlemi iki yeni nokta için tekrarla ve gözlemlerini kaydet.

4.5. Vektörlerin Uygulamaları (Kullanımı)

ARAŞTIRMA

Vektörlerin teknik, fizik, matematik ve diğer bilimlerde geniş uygulamaları vardır. Bu görüşü destekleyecek bir araştırma yap.

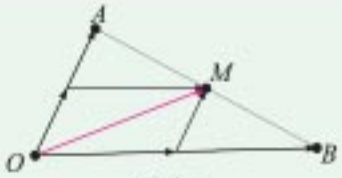
ÖRNEK 1

M, AB doğru parçasının orta noktası, O ise düzlemde rastgele bir nokta olsun. Şu eşitliği kanıtla: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OM}$ vektörü iki yolla elde edilebilir: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ ve $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ (Şekil 1).

Bu eşitlikleri toplarsak şu sonucu buluruz:

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$,
$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \vec{0}$, çünkü $\overrightarrow{AM}$ ve $\overrightarrow{BM}$
bunlar zıt vektörlerdir yani
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$. demek ki $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

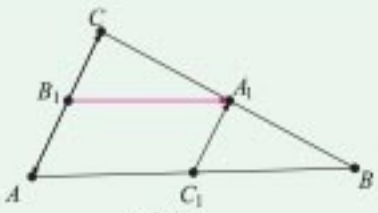


Şekil 1

ÖRNEK 2

A_1 ve B_1 noktaları, ABC üçgeninin sırasıyla BC ve AC kenarlarının orta noktalarıdır (şekil 2).
$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ eşitliğini ispatla.

Üçgen kuralına göre şunları elde ederiz: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$.
Öte yandan: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.
Bu eşitlikleri toplayarak şunları elde ederiz:
$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.
$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A}) + (\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BA_1})$; $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \vec{0} + \vec{0}$;
$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Şekil 2

Üçgen ABC'de A_1B_1 doğru parçasına orta doğru denir. Bu doğru, kenar AB'ye paraleldir. Çünkü $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ buradan da $|\overrightarrow{B_1A_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ elde edilir. Bu da vektörlerin kolineer olduğunu, yani $\overline{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ve $B_1A_1 \| AB$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla üçgendeki orta doğru, paralel olduğu kenarın uzunluğunun yarısına eşittir.

ÖRNEK 3

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ kolineer olmayan vektörler olsun. x, y ∈ R. Eğer $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ ise, o hâlde x = y = 0. İspat et!

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ kolineer olmadığından, bunlar sıfır vektörü değildir. Diyelim ki x≠0. O zaman $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ Bu ise $\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$'nin kolineer olduğunu gösterir ki varsayımla çelişir. Aynı şekilde y ≠ 0 alınırsa da çelişki bulunur. Öyleyse x = y = 0 geçerli olmalıdır.

ÖRNEK 4

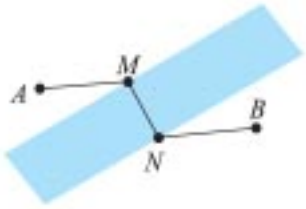
Her paralelkenarda köşegenler birbirlerini ortalar. İspat et!

ABCD paralelkenarı ve AC ve BD köşegenlerin kesim noktası O olsun. A, O ve C kolineer oldukları için, $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ olacak şekilde reel sayılar x vardır. Benzer şekilde, öyle bir reel sayı y vardır ki $\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

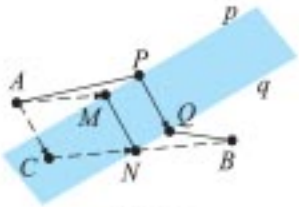
Öte yandan $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ yerine koyduğumuzda şu eşitlik elde edilir: $y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ yani $(x-1+y)\overrightarrow{AB} + (x-y)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.:
AB ve AD vektörleri kolineer değildir, örnek 3'te olduğu gibi $x-1+y=0$ ve $x-y=0$ yani $x = y = \frac{1}{2}$.

ÖRNEK 5

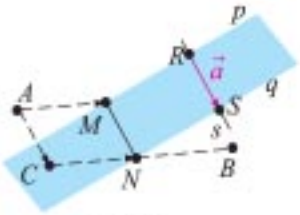
A ve B şehirleri arasında, kenarları p ve q doğruları ile gösterilen paralel kıyılara sahip bir nehir bulunmaktadır. A'dan B'ye giden yolun en kısa olması için, kıyılara dik biçimde yerleştirilecek köprü nereye kurulmalıdır (Şekil 3)?



Şekil 3



Şekil 4



Şekil 5

Aranan köprü PQ olsun (Şekil 4). $\vec{d} = \overrightarrow{PQ}$ alınsın; C noktası öyle seçilir ki $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC}$ olsun; böylece *APQC* dörtgeni bir paralelkenardır. Buradan $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AP}$ sonucu çıkar. A'dan B'ye yolun en kısa olması için kırık çizgi C Q B en kısa olmalıdır; bu, ancak C,Q,B noktaları kolineer ise mümkündür. Demek ki $\{Q\} = CB \cap q$.

Buna göre aranan M yerini şu şekilde buluruz:

– p ve q doğrularına dik bir s doğrusu çizilir. $\{R\} = s \cap p$ ve $\{S\} = s \cap q$ olsun (Şekil 5)

– $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{RS}$ vektörü kurulur ve $\{N\} = BC \cap q$ olsun; aranan M noktası, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RS}$ koşulunu sağlayan noktadır.

Yol *AMNB* en kısadır. $\overline{MN}$ sabit olduğundan, yol yalnızca AM ve NB uzunluklarına bağlıdır; bunların toplamı, C,N,B noktaları kolineer olduğunda en küçüktür.

ÖRNEK 6

A ve B ile gösterilen iki yerleşim birimi, düz bir yolun aynı tarafında bulunmaktadır. $\overline{AC} + \overline{BC}$ toplamı en küçük olacak biçimde, bu yol üzerinde otobüs durağı C nereye yerleştirilmelidir?

A'dan yola indirilen dikmenin ayağı AA_1 kesitinin orta noktası M olsun; ayrıca $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1}$ (Şekil 6). O hâlde $\triangle AMC$ ile $\triangle A_1MC$ denktir; dolayısıyla $\overline{AC} = \overline{A_1C}$. Bundan $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A_1C} + \overline{BC}$ elde edilir. Eğer C, A_1B doğrusu üzerinde değilse, üçgen eşitsizliğinden $\overline{A_1C} + \overline{BC} > \overline{A_1B}$ olur. Buna karşılık C, A_1B doğrusu üzerinde ise $\overline{A_1C} + \overline{BC} = \overline{A_1B}$, yani $\overrightarrow{A_1C}$ ile $\overrightarrow{CB}$ kolineerdir. Sonuç olarak $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A_1C} + \overline{BC}$ toplamı, C noktasının, yol ile A_1B doğrusunun kesişiminde olduğunda en küçüktür. Demek ki aranan en küçük değer, yol ile A_1B doğrusunun kesişim noktasında elde edilir; burada A1,A'nın yol eksenine göre simetriğidir, yani $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1}$.



Şekil 6

ETKİNLİK

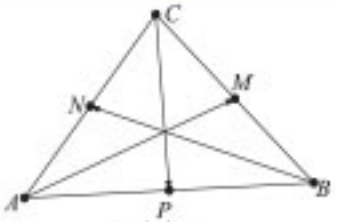
Şekil 3'te $\vec{v}$ anlık hız, $\vec{a}$ ise otomobilin yavaşlamasını (hava direncini) göstermektedir. Neden $\vec{a}$ $\vec{v}$'ye zıt yönlü bir vektördür, açıklayınız ve bu iki vektörü ilişkilendiren bir bağıntı yazınız.



Resim 3

ALIŞTIRMA SORULARI

1. M, N, P noktaları, ABC üçgeninin kenarlarının orta noktaları olsun (Şekil 7). $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$. olduğunu ıspatla:



Şekil 7

2. ΔABC'nin T ağırlık merkezi olsun. O, düzlemde rastgele bir nokta iken $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ ıspatla.

3. *ABCD* bir karedir ve S, köşegenlerin kesim noktasıdır. M ve N, sırasıyla BS ve DS parçalarının orta noktalarıdır. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$, vektörlerini $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$ ve $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$ cinsinden ifade et.

4. *ABCDEF* düzgün altıgendir ve *S*, çevrel çemberin merkezidir. Verilen vektörleri sadeleştir:
   a) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$, b) $\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{AB}$, c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ES}$, d) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CS}$.

5. ΔABC'de D, E, F sırasıyla BC, AC ve AB kenarlarının orta noktaları olsun. $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ ve $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$ ise $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ve $\overrightarrow{CF}$ vektörlerini $\vec{m}$ ve $\vec{n}$ cinsinden ifade et.

6. $\overrightarrow{v_1}$ suyun hızı, $\overrightarrow{v_2}$ su etkisi yokken kanonun (kayak) hızı, $\vec{v}$ ise su etkisi altındaki gerçek hızdır (Resim 4). $|\overrightarrow{v_1}| = 4$ m/s ve $|\overrightarrow{v_2}| = 6$ m/s ise $\vec{v}$ vektörünün büyüklüğünü bul.



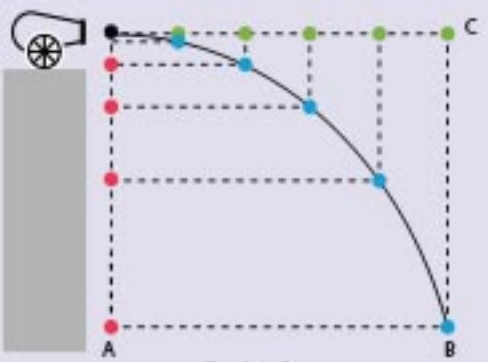
Resim 4

ARAŞTIRMA

1) Zoran bir kanokçudur. Neden nehrin akış yönünde, ters yöne göre daha hızlı ilerlediğini; ayrıca nehrin karşı kıyısına geçerken neden tam hedeflediği noktaya varamadığını merak ediyor. Zoran'a ne cevap verirsin?

2) Yana düz bir yolda kızağı çekmektedir. Halat, zeminle 30° açı yapıyor; çekme kuvvetinin büyüklüğü 20 N. Kızağa etki eden tüm kuvvetleri belirle. Bu kuvvetleri gösteren bir şema çiz. Zıt yönlü olan kuvvetleri belirt. Yana'nın çekme kuvvetini yatay ve düşey bileşenlerine ayır. Bu kuvvetlerin kızağın hareketine etkisini açıkla.

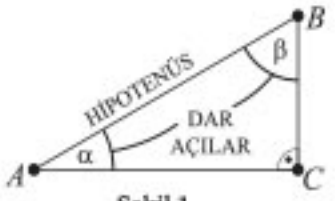
3. Top, bir gülleyi yatay doğrultuda fırlattığı anda, özdeş başka bir gülle tam aynı yükseklikten dikey olarak serbest bırakılıyor (Resim 3). Hangi gülle önce yere ulaşır? Açıkla.



Resim 3

4.6. Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

Üçgen ABC'de C tepesindeki açı dik (90°) olsun. A ve B tepelerindeki açılar dardır. Dik açıya karşı düşen AB kenarına **hipotenüs** denir. Üçgendeki dar açılardan birini α ile gösterirsek, bu açıya göre BC kenarı **karşı dik kenar**, AC kenarı **komşu dik kenar** olarak adlandırılır.



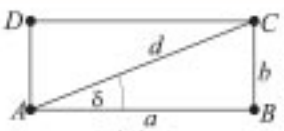
Şekil 1

- **Sinüs:** α açısının sinüsü, α açısına karşı olan dik kenarın $\overline{BC}$ uzunluğunun hipotenüsün $\overline{AB}$ uzunluğuna oranıdır; yani $\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$.
- **Kosinüs:** α açısının kosinüsü, α açısına komşu olan dik kenarın $\overline{AC}$ uzunluğunun hipotenüsün $\overline{AB}$ uzunluğuna oranıdır; yani $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.
- **Tanjant:** α açısının tanjantı, α açısına karşı olan dik kenarın $\overline{BC}$ uzunluğunun α açısına komşu olan dik kenarın $\overline{AC}$ uzunluğuna oranıdır; yani $\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.
- **Kotanjant:** α açısının kotanjantı, α açısına komşu olan dik kenarın $\overline{AC}$ uzunluğunun α açısına karşı olan dik kenarın $\overline{BC}$ uzunluğuna oranıdır; yani $\text{ctg}\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Bu oranlar, dik üçgendeki kenar uzunlukları ile dar açılar arasındaki bağımlılıkları veren **trigonometrik oranlardır**.

ÖRNEK 1

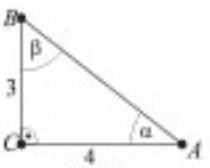
Dikdörtgen ABCD'de bir dar açı δ için
$\sin\delta = \frac{b}{d}$, $\cos\delta = \frac{a}{d}$, $\text{tg}\,\delta = \frac{b}{a}$ ve $\text{ctg}\,\delta = \frac{a}{b}$. olur.



Şekil 2

SORU 1

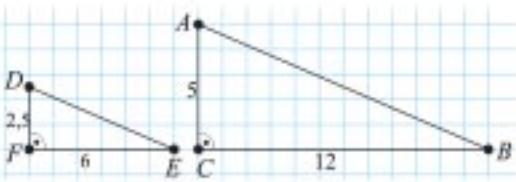
Dik kenarları 3 cm ve 4 cm olan bir dik üçgen veriliyor.
sinα, cosα, tanα, cotα, sinβ, cosβ, tanβ ve cotβ değerlerini bul. (Şekil 3)



Şekil 3

SORU 2

ABC ve DEF üçgenleri verilmiştir. Dar açı α için her iki üçgende trigonometrik oranları bul ve bunların birbirine eşit olduğunu ispatla.



Şekil 4

Eğer iki dik üçgenin karşılık gelen kenarlarının oranı aynı ise, o hâlde karşılık gelen dar açılardan **trigonometrik oranları da aynıdır.**

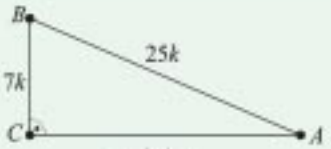
ÖRNEK 2

Bir dik üçgende $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ olduğu bilinmektedir. Şekil 5'te gösterildiği gibi, açı α için kalan diğer trigonometrik oranları belirle.

Bu üçgenin kenarlarını $a = 7k$, $c = 25k$ olarak gösterelim.

O hâlde Pisagor teoremine göre $b = \sqrt{(25k)^2 - (7k)^2} = 24k$;

dolayısıyla $\cos\alpha = \frac{24k}{25k} = \frac{24}{25}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{7k}{24k} = \frac{7}{24}$ ve $\text{ctg}\,\alpha = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$.



Şekil 5

ÖRNEK 3

Hesap makinesi yardımıyla aşağıdaki trigonometrik oranları karşılaştır:

a) $\sin 35°$ ve $\sin 67°$, b) $\cos 40°$ ve $\cos 23°$,

c) $\text{tg}\,36°$ ve $\text{tg}\,58°$, d) $\text{ctg}\,73°$ ve $\text{ctg}\,39°$.

Fark etmişsindir ki $\sin 35° < \sin 67°$, $\cos 40° < \cos 23°$, $\text{tg}\,36° < \text{tg}\,58°$ ve $\text{ctg}\,73° < \text{ctg}\,39°$.

Şekil 6'daki üçgenlerin hipotenüsleri eşit olsun: $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \cdots = \overline{OB_n} = r$. Hipotenüs ile dik kenarlar $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ arasındaki dar açıları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ile gösterelim.

Yapıma göre açıkça $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < \ldots < \overline{A_nB_n}$ ve $\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > \ldots > \overline{OA_n}$ olur.

$\sin\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{r}$, $\sin\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{r}$ ..., $\sin\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{r}$ eşitliklerinden, dar bir açının sinüsünün değeri açı büyüdükçe arttığı açıkça görülür.

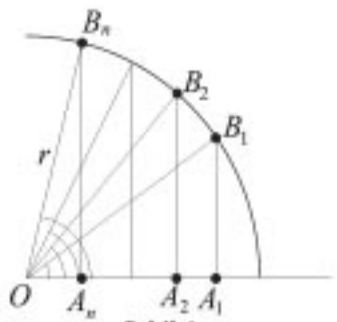
Başka bir deyişle, α açısı 0° ile 90° arasında büyürken $\sin\alpha$ artar.

Benzer biçimde, $\cos\alpha_1 = \frac{\overline{OA_1}}{r}$, $\cos\alpha_2 = \frac{\overline{OA_2}}{r}$, ..., $\cos\alpha_n = \frac{\overline{OA_n}}{r}$ eşitliklerinden, dar bir açının kosinüsünün değeri açı büyüdükçe azaldığı sonucuna varılır.

Başka bir deyişle, α açısı 0° ile 90° arasında büyürken $\cos\alpha$ azalır.

Aynı yöntemle,

$\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$, $\text{tg}\,\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}}$, ..., $\text{tg}\,\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}}$ eşitliklerinden, dar bir açının tanjantının değeri açı büyüdükçe arttığı sonucuna varırız; çünkü bu durumda paylar büyürken, oranların paydaları küçülür.



Şekil 6

Demek ki $\text{tg}\alpha$ 0° dan başlayıp 90° tan küçük değerlere kadar arttıkça artar ve 0'dan başlayan, negatif olmayan bir gerçel sayıdır.

Benzer şekilde, ctgα değerinin, α değeri 0° tan büyük olup 90° a doğru arttığında, 0'a kadar azaldığını ve negatif olmayan bir gerçek sayı olduğunu çıkarırız.

Not. $0° < \alpha < 90°$ için $0 < \sin\alpha < 1$ ve $0 < \cos\alpha < 1$ $0 < \cos\alpha < 1$ elde edilir.
Ayrıca $0° < \alpha < 90°$ için $\tan\alpha > 0$ ve $0° < \alpha < 90°$ için $\operatorname{ctg}\alpha > 0$.

SORU 3

Aşağıdakiler sağlanıyorsa açılar için hangi eşitsizlik geçerlidir:

a) $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2 > \sin\alpha_3$, b) $\cos\beta_1 < \cos\beta_2 < \cos\beta_3$,

c) $\operatorname{tg}\gamma_2 > \operatorname{tg}\gamma_3 > \operatorname{tg}\gamma_1$, d) $\operatorname{ctg}\delta_3 < \operatorname{ctg}\delta_1 < \operatorname{ctg}\delta_2$?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir dik üçgende, iki dik kenar a ve b verildiğinde, β açısının trigonometrik oranlarını belirleyin:
   a) $a = 5, b = 12$, b) $a = 3, b = 5{,}2$.

2. Bir dik üçgende, dik kenar a ve hipotenüs c verildiğinde, α açısının trigonometrik oranlarını, belirleyin: a) $a = 8, c = 10$, b) $a = 9{,}8, c = 12{,}6$.

3. α açısının öteki trigonometrik işlevlerin(oranlarını) belirleyin, eğer
   a) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, b) $\cos\alpha = \frac{21}{29}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{52}{173}$, d) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{69}{269}$.

4. Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olup olmadığını kontrol edin:
   a) $\sin 13° > \sin 53° > \sin 88°$, b) $\cos 46° < \cos 22° < \cos 15°$.

ARAŞTIRMA

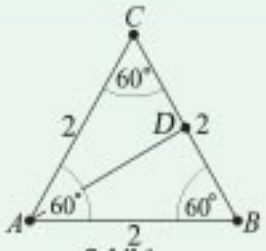
Bir geometri yazılımı seçi ve C noktasında dik açısı bulunan ABC dik üçgenini çiz. A ve B noktasındaki açıları sırasıyla α ve β ile, dik kenarları BC ve AC'yi sırasıyla a ve b ile göster. a > b olacak şekilde dik kenarlar seç. Hipotenüse CD yüksekliğini çiz. $\frac{a}{b}$ ve $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ oranlarını incele. Gözlemlerini açıkla. Aynı işlemi a < b için tekrarla.

4.7. 30°, 45° Ve 60° Açılarının Trigonometrik Oranları

ÖRNEK 1

Kenar uzunluğu 2 cm olan eşkenar üçgen ABC'yi ele alalım (şekil 1). A tepesinden indirilen yükseklik AD, aynı zamanda A noktasındaki açının açıortayı ve BC kenarının orta dikmesidir. Buna göre $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ ve $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Pisagor teoreminin uygulanmasıyla, şekil 2'deki dik üçgen ABD için $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ elde edilir; buradan $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, dolayısıyla $\overline{AD} = \sqrt{3}$.



Şekil 1

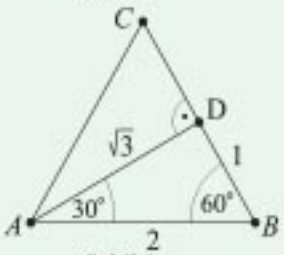
Şimdi ABD üçgenindeki açılar için trigonometrik oranlar:

$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{tg}\, 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg}\, 60^\circ = \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\text{ctg}\, 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, $\text{tg}\, 60^\circ = \text{ctg}30^\circ = \sqrt{3}$.



Şekil 2

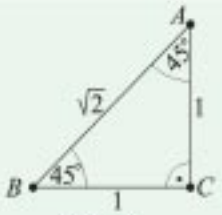
ÖRNEK 2

45° açısının trigonometrik oranlarını hesaplamak için, kenarı 1 cm olan ikizkenar dik üçgen çizilir (şekil 3). Dar açıların her biri 45°'tur. Pisagor teoremine göre hipotenüs $\overline{AB} = \sqrt{2}$. olur.

Tanımlardan

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$ ve $\text{tg}\, 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 = \text{ctg}\, 45^\circ$

sonucu elde edilir.



Şekil 3

Elde edilen trigonometrik oranlar tablo hâlinde gösterilebilir.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

SORU 1

$45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$ ifadesinin değerini hesapla.

ÖRNEK 3

$4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ = \text{tg}^2 60^\circ + \text{ctg}^2 30^\circ$ eşitliğinin doğru olup olmadığını kontrol et.

$30° = \text{tg}\,60°$ olduğundan, $\text{tg}^2 60° + \text{ctg}^2 30° = 2 \cdot \text{tg}^2 60° = 2(\sqrt{3})^2 = 6$ olduğunu elde ederiz.
Öte yandan,

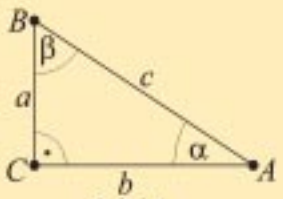
$$4\sin^2 60° + 4\cos^2 60° = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 + 1 = 4.$$

Sol tarafın değeri sağ taraftan farklı $(4 \neq 6)$ olduğundan,
$4\sin^2 60° + 4\cos^2 60° \neq \text{tg}^2 60° + \text{ctg}^2 30°$ sonucuna varırız.

SORU 2

$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin\alpha}$ ifadesinin değerini bul.

Dik üçgendeki iki açı **tümler açılardır** (birbirini 90 dereceye tamamlayan iki açıdır). Eğer α, ABC dik üçgeninde bir dar açı ise (şekil 4), onun tümler açısı $\beta = 90° - \alpha$ olur.



Şekil 4

Kenar a, α için karşı, β için komşu dik kenardır; kenar b ise α için komşu, β için karşı dik kenardır. Buna göre α ve β açıları için trigonometrik oranlar:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \text{ctg}\,\beta, \text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \text{tg}\,\beta$$ Buradan

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos(90° - \alpha), \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin(90° - \alpha),$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \text{ctg}(90° - \alpha), \quad \text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \text{tg}(90° - \alpha).$$ eşitlikleri elde edilir.

ÖRNEK 4

Verilen ifadeleri sadeleştir:

a) $\sin 40° + 4\cos 50°$, b) $\frac{3\,\text{tg}\,20° + 4\,\text{ctg}\,70°}{5\,\text{tg}\,20° - \text{ctg}\,70°}$.

Tümler açıların trigonometrik oranları kullanılarak:

a) $\sin 40° + 4\cos 50° = \cos(90° - 40°) + 4\cos 50° = \cos 50° + 4\cos 50° = 5\cos 50°$

b) $\frac{3\,\text{tg}\,20° + 4\,\text{ctg}\,70°}{5\text{tg}\,20° - \text{ctg}70°} = \frac{3\,\text{tg}\,20° + 4\,\text{tg}\,(90 - 70°)}{5\,\text{tg}\,20° - \text{ctg}(90 - 70°)} = \frac{3\,\text{tg}\,20° + 4\,\text{tg}\,20°}{5\,\text{tg}\,20° - \text{tg}\,20°} = \frac{7\,\text{tg}\,20°}{4\,\text{tg}\,20°} = \frac{7}{4}$.

ÖRNEK 5

$\cos(\alpha + 10°) = \sin 20°$ ise α açısını bul.

Trigonometri oranlarının tümler açı bağıntısından $\cos(\alpha + 10°) = \sin[90° - (\alpha + 10°)] = \sin 20°$ olduğundan, $90° - (\alpha + 10°) = 20° \Rightarrow \alpha = 60°$ elde edilir.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Verilen ifadelerin değerini hesapla:

   a) $\sin^2 30° + \cos^2 30°$, b) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$, c) $\frac{\sin 30° + 1}{1 + \cos 60°}$, d) $\frac{\text{tg } 30° + \text{ctg } 45°}{\text{ctg } 60° + \text{tg } 45°}$.

2. Hesapla:

   a) $2 \cdot \cos 30° \cdot \cos 45° \cdot \sin 30° \cdot \cos 60°$, b) $\sin^2 30° + \text{tg}^2 60° \cdot \sin 30° \cdot \cos 60°$

3. Verilen ifadelerin değerini hesapla:

   a) $\frac{1 + \sin 30°}{1 - \sin 30°}$, b) $\frac{\text{ctg } 60° + \text{tg } 45°}{1 - \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°}$, c) $\frac{4 \sin^2 45° + 1}{\text{ctg}^2 30°}$.

4. α açısını bul, eğer:

   a) $\cos(\alpha + 10°) = \sin 30°$, b) $\text{tg } 35° = \text{ctg}(\alpha + 15°)$,

   c) $\sin(\alpha + 30°) = \cos(\alpha + 30°)$, d) $\text{tg}(\alpha + 20°) = \text{ctg}(\alpha - 10°)$.

5. İfadeleri sadeleştir:

   a) $\frac{3 \sin 35° + 5 \cos 55°}{2 \sin 35°}$, b) $\frac{\sin 40° \cdot \cos 50°}{\sin^2 40° + \cos^2 50°}$, c) $\frac{\sin 15°}{\cos 75°} + \frac{ctg62°}{tg28°}$

6. $\alpha + \beta = 90°$ ise, ifadeleri sadeleştir:

   a) $\sin \alpha + \cos \beta$, b) $\sin \alpha - \cos \beta$, c) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$, d) $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$,

   e) $\frac{\text{tg } \alpha}{\text{ctg } \beta}$, f) $\frac{k - \text{ctg } \alpha}{\text{tg } \alpha} - \frac{k + \text{tg } \alpha}{\text{ctg } \beta}$, g) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \beta + \cos \beta}$

ARAŞTIRMA

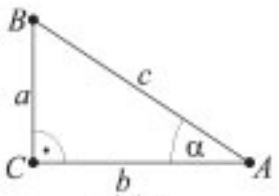
Bir geometri yazılımında eşkenar üçgen çizi. Üçgenin iç bölgesinde rastgele bir nokta seç. Bu noktanın üçgenin kenarlarına olan uzaklıklarını ölç ve bu uzaklıkların toplamını üçgenin yüksekliği ile karşılaştır. Ne gözlemledin? Bir kanıt oluşturmaya çalış.

4.8. Aynı Açı Alpha İçin Trigonometrik Oranlar

Dik üçgen ABC'de (şekil 1) Pisagor teoremi $a^2 + b^2 = c^2$ geçerlidir. Bu eşitliği c^2 ile bölersek,

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$ yani $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

$\frac{a}{c} = \sin \alpha$ ve $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ olduğundan, yukarıdaki sonucumuzun yerine koyarak $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. sonucunu elde ederiz.



Şekil 1

ÖRNEK 1

$\alpha = 30^\circ$ olsun. O hâlde $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$



$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ eşitliğini kullanarak şu ifadeleri elde edebiliriz:
$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ve $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

SORU 1

$\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ise cosα'yı hesapla.

ÖRNEK2

Verilen ifadeyi sadeleştir: $(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)$

$(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$

Dik üçgen ABC için (şekil 1) $\text{tg}\, \alpha = \frac{a}{b}$ ve $\text{ctg}\, \alpha = \frac{b}{a}$.
Yukarıdaki eşitliklerin sağ taraflarının pay ve paydalarını c ile bölersek ($c \neq 0$) aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ ve } \text{ctg}\, \alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Tanα ile cotα ile çarpılırsa bir başka eşitlik daha elde edilir: $\text{tg}\, \alpha \cdot \text{ctg}\, \alpha = 1.$

SORU 2

cotα=2 ise tanα'yı hesapla.

ÖRNEK 3

tgα=2 ise $\text{ctg}\, \alpha = \frac{1}{\text{tg}\, \alpha} = \frac{1}{2}.$

α açısının öteki trigonometrik oranlar hakkında $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\, \alpha$ olduğundan
$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ yani, $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Öte yandan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ olduğundan
$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 5 \cos^2 \alpha = 1$ Buna göre $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$ öyleyse
$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki durumlarda, verilenlerden öteki trigonometrik oranları hesapla:
   a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, b) $\cos\alpha = 0{,}25$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, d) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}41$.

2. İfadeleri sadeleştir:
   a) $1-\cos^2\alpha$, b) $\sin^2\alpha - 1$, c) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, d) $\frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\alpha}$.

3. Aşağıdakileri kanıtla:
   a) $\sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = 1$, b) $\sin^2\alpha \cdot (1+\operatorname{ctg}^2\alpha) + \cos^2\alpha \cdot (1+\operatorname{tg}^2\alpha) = 2$.

4. Tüm dar açılar için aşağıdakilerin geçerli olduğunu kanıtla:
   a) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$, b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$,
   в) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

5. Tüm dar açılar için aşağıdakilerin geçerli olduğunu kanıtla:
   a) $\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha}$, b) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} + \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = 2$

6. Tüm dar açılar için aşağıdakinin geçerli olduğunu kanıtla: $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - 1} = \cos\alpha + \sin\alpha$.

7. Aşağıdakileri ifade edin: a) $\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ cinsinden, $\sin\alpha$, b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$'yı $\cot\alpha$ cinsinden.

8. Eğer $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, ise, $\frac{5\sin\alpha + \cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

9. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. ise, $4\operatorname{tg}\alpha - 3\sin\alpha$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

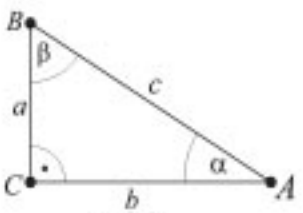
ARAŞTIRMA

İkizkenar dik üçgen ABC'yi, dik açısı C noktasında olacak biçimde çiz. AC kenarı üzerinde D noktasını, $\measuredangle DBA = 30°$ olacak şekilde seç ve DE'yi $\triangle ABD$ içinde yükseklik olarak çiz. $\measuredangle CBD = \alpha$ olsun. AE=1 için sin,α ve cosα değerlerini hesapla.

4.9. Dik Üçgen Çözümü

ABC dik üçgeninin kenarları a,b,c olsun (şekil 1);
dar açıları α ve β ile gösterilsin. O hâlde
$\alpha + \beta = 90°$ ve $a^2 + b^2 = c^2$.
Bunun yanında, trigonometrik oranların tanımından
şunlara elde ederiz:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \frac{b}{c} = \cos\alpha, \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{a}{c} = \cos\beta, \frac{b}{c} = \sin\beta, \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta$$



Şekil 1

Aşağıdak verilen bilgilerin tümünü, dik üçgenin temel elemanlarını yani kenarlarını ve açılarını hesaplamak için kullanacağız:

- bir kenar ve bir açı verildiğinde,
- iki kenar verildiğinde.

Bir dik üçgenin çözülmesi, verilen elemanlara (en az birinin kenar olması şartıyla) dayanarak, onun tüm temel elemanlarının hesaplanması demektir.

ÖRNEK 1

Hesap makinesi yardımıyla aşağıdakilerin değerini bul:
a) $\sin 37°30'$, b) $\cos 70°40'$, c) $\operatorname{tg} 56°$, d) $\operatorname{ctg} 25°$.

a) $37°30' = 37° + \left(\frac{30}{60}\right)^{\circ} = 37° + 0{,}5° = 37{,}5°$. Hesap makinesinde SIN tuşu seçilerek sin $\sin 37{,}5° \approx 0{,}60876$ elde edilir.

b) COS tuşu ile ccos $70°40' \approx \cos 70{,}67° \approx 0{,}331$.

c) Bu durumda TAN tuşu ile $\operatorname{tg} 56° \approx 1{,}48256$.

d) $\operatorname{ctg} 25° = \frac{1}{\operatorname{tg} 25°}$ olduğundan, önce $\operatorname{tg} 25° \approx 0{,}46631$ bulunur; buradan $\operatorname{ctg} 25° \approx \frac{1}{0{,}46631} \approx 2{,}14$.

ÖRNEK 2

Bir açının bir trigonometrik oranı biliniyorsa, hesap makinesi yardımıyla açı ölçüsünü bul; yani α açısını belirle, eğer:
a) $\sin\alpha = 0{,}26049$, b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}04129$

a) Önce 0,260490 değeri girilir, sonra SIN^{-1} seçilir ve $\sin^{-1}(0{,}26049) \approx 15{,}099 \approx 15°59''$ elde edilir.
b) Benzer biçimde $\operatorname{tg}^{-1}(0{,}04129) \approx 2{,}36° \approx 2°22'$

ÖRNEK 3

Hipotenüsü $c = 93$ cm ve açısı $\alpha = 42°23'$ olan dik üçgeni çöz.

Üçgen, iki dik kenarın a ve b uzunlukları ile dar açı β'nın ölçüsü belirlenirse çözülmüş olur. Dik üçgendeki dar açılar tümler olduğundan $\beta = 90° - \alpha = 90° - 42°23' = 47°37'$. Dik kenar a'yı bulmak için, hesap makinesiyle $\sin 42{,}383° \approx 0{,}67408$ bulunur ve $a = c \cdot \sin\alpha = 93 \cdot 0{,}67408 \approx 62{,}7$ $a \approx 63$ cm cm'dir.

Dik kenar b, hipotenüs ve α açısının kosinüsü yardımıyla ya da Pisagor teoremi uygulanarak hesaplanabilir:

Birinci Yol: $b = c \cdot \cos\alpha = 93 \cdot \cos 42{,}383° = 93 \cdot 0{,}73866 \approx 68{,}7$ bu da $b \approx 69$ cm'dir.

İkinci Yol: $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69$ cm.

ÖRNEK 4

Dik kenarları a = 21 cm ve b = 15 cm olan dik üçgeni çözünüz.

Üçgen, hipotenüsün uzunluğu il e iki dar açının ölçüsü belirlenirse çözülmüş sayılır.

Hipotenüsü Pisagor teoremi ile hesaplarız, yani $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25$ cm

Açı α'yı tanjant fonksiyonu ile belirleyeceğiz. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1{,}4$ koşulundan $\alpha \approx 54^\circ 28'$ hesaplarız.

β açısı için $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 54^\circ 28'$,, yani $\beta \approx 35^\circ 32'$.

SORU 1

Dik kenarı b = 53 cm ve açısı $\beta = 64^\circ$ olan dik üçgeni çöz.

SORU 2

Dik kenarı a = 37 cm ve hipotenüsü c = 48 cm olan dik üçgeni çöz.

ALIŞTIRMA SORULARI

Aşağıdaki 1–4 numaralı alıştırmalarda, ABC dik üçgenini çöz, eğer:

1. a) $\alpha = 36{,}2^\circ, c = 68$ cm, b) $\beta = 15{,}8^\circ, c = 12{,}2$ cm.
2. a) $\beta = 65{,}4^\circ, a = 2{,}35$ cm, b) $\alpha = 82^\circ, b = 246$ cm, c) $\beta = 48^\circ 30', b = 74{,}7$ cm.
3. a) $\alpha = 24^\circ, a = 5{,}25$ cm, b) $\alpha = 30^\circ 50', b = 53{,}5$ cm.
4. a) $b = 3{,}9$ cm, $c = 4{,}5$ cm, b) $a = 230$ cm, $c = 320$ cm, c) $a = 52{,}5$ cm, $b = 28$ cm.
5. Kenarları a = 5 cm ve b = 20 cm olan bir dikdörtgen verilmiştir. Dikdörtgenin köşegenlerinin kesiştiği dar açıyı belirle.

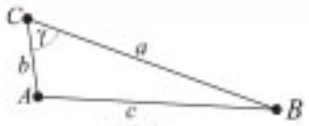
ARAŞTIRMA

"Yükselme açısı" ve "alçalma açısı" kavramları üzerine bir araştırma yap. Doğada bu açıların hangi araçlarla ölçülebileceğini belirt.

4.10. Üçgenin Alanı

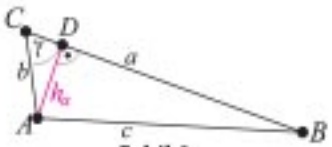
ETKİNLİK

$\gamma = 60^\circ$, $a = 12$ cm ve $b = 4$ cm olan ABC üçgeni verilmiştir (şekil 1). Alanını hesapla.



Şekil 1

Üçgenin alanını hesaplama formülü, bir kenar ile o kenara indirilen yüksekliğin yarım çarpımıdır; bu nedenle a kenarına h_a yüksekliğini indiririz(çizeriz) (şekil 2). Yüksekliğin a kenarını kestiği noktayı D ile gösterirsek, CAD üçgeni dik olup dar açısı γ'dır ve $\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$ yani $h_a = b \cdot \sin\gamma = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

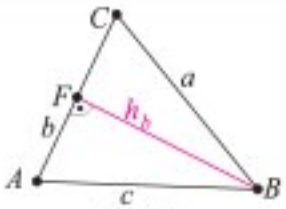


Şekil 2

Böylece $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm^2.

ETKİNLİK

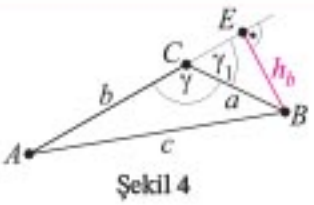
γ dar açısı ve a, b kenarları bilinen ABC üçgeninin alanını hesapla. h_b yüksekliğinin b kenarını kestiği F noktasında dik açıya sahip BCF dik üçgenini incele (şekil 3) ve $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ olduğunu göster.



Şekil 3

ETKİNLİK

γ geniş açısı ve a,b kenarları bilinen ABC üçgeninin alanını hesapla. h_b yüksekliğini b kenarının uzantısına çizeriz (şekil 4). Dar açı $\gamma_1 = 180^0 - \gamma$ olup, CBE dik üçgeninden $\sin\gamma_1 = \frac{h_b}{a}$ ve $h_b = a \cdot \sin\gamma_1$ elde edilir; buradan $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma_1}{2}$.



Şekil 4

SORU 1

Alanı, a kenarının uzantısına indirilen h_a yüksekliğiyle hesapla.

Not. γ_1 ABC üçgeninin dış açısıdır; yani $\gamma_1 = \alpha + \beta$. Bu nedenle $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2}$.

Üçgenin alanı, dar bir γ açısı ve bu açıyı oluşturan iki kenar a ile b verildiğinde $P_\Delta = \frac{ab\sin\gamma}{2}$ formülüyle hesaplanır.

Eğer verilen γ açısı geniş ise, alan $P_\Delta = \frac{ab\sin\gamma_1}{2}$ ve $\gamma_1 = 180° - \gamma$ formülüyle bulunur.

SORU 2

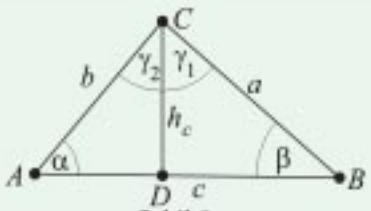
$\gamma = 120°$, $a = 7$ cm ve $b = 15$ cm için ABC üçgeninin alanını hesapla.

ÖRNEK 1

ABC üçgeninin alanı $P_{\Delta ABC} = 9\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm², kenarı a=6 cm ve yüksekliği $h_c = 3\sqrt{2}$ cm'dir. ABC üçgenini çöz.

Üçgenin alan formülünden $P_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2}$,

olduğundan $c = \frac{2 \cdot 9\left(\sqrt{3}+1\right)}{3\sqrt{2}} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}}$ cm.



Şekil 5

BCD üçgeni dik olduğundan (şekil 5)

$\sin\beta = \frac{h_c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dolayısıyla $\beta = 45°$.

Bu durumda $\gamma_1 = 45°$, olduğundan $\overline{BD} = h_c = 3\sqrt{2}$ cm olur.

Öyleyse $\overline{AD} = c - \overline{BD} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ cm.

CAD üçgeni dik olduğundan $\text{tg}\,\alpha = \frac{h_c}{\overline{AD}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ buradan $\alpha = 30°$.

Son olarak $\gamma = 180° - 30° - 45° = 105$ ve $\sin 30^0 = \frac{3\sqrt{2}}{b}$, olduğundan $b = 6\sqrt{2}$ cm.

SORU 3

ABC üçgeninin alanı $P_{\Delta ABC} = \left(\frac{15\sqrt{3}+27}{2}\right)$ cm², kenarı $b = 3\sqrt{6}$ cm ve yüksekliği $h_c = 3\sqrt{3}$ cm'dir. ABC üçgenini çöz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. ABC üçgeninin alanını hesapla:
   a) $a = 6$ cm, $b = 0{,}7$ dm ve $\gamma = 45°$,
   b) $b = 9$ cm, $c = 0{,}5$ dm ve $\alpha = 60°$.

2. ABC üçgeninin alanını hesapla:
   a) $b = 11$ cm, $\beta = 63°$ ve $\gamma = 72°30'$, b) $a = 10$ cm, $\alpha = 38°$ ve $\beta = 67°$.
3. Taban açısı $30°20'$ ve taban uzunluğu 6 cm olan ikizkenar ABC üçgeninin alanını belirle.
4. Yamuk ABCD'de küçük taban b = 10 cm, yükseklik h = 8 cm ve taban açılar $\alpha = 30°20'$ ve $\beta = 46°30'$ verilsin. Yamuğun alanını hesapla.

ARAŞTIRMA

Snell yasası, kırılma indisleri ile kırılma katsayısı arasındaki bağıntıyı verir: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Su ve cam için katsayılar sırasıyla 1,33 ve 1,52'dir. Işın camdan suya geçerken sınırı aşacağı (geçeceği) en büyük açıyı nasıl hesaplayacağını açıkla. Diğer malzeme çiftleri için de sınırdaki açıları hesapla.

4.11. Trigonometrik Oranların Problem Durumlarında Uygulanması

Bir düzlem ve bu düzlem üzerinde olmayan bir M noktası verilsin. M'den düzleme dik bir doğru indirilsin ve bu doğrunun düzlemle kesişim noktası N ile gösterilsin. O hâlde MN, düzlemde yatan her doğru ile dik açı oluşturur.

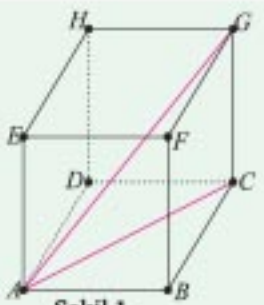
ÖRNEK 1

Kenar uzunluğu a=5 cm olan küp ABCDEFGH verilsin (şekil 1). ∠CAG açısını belirle.

Kenar GC, taban düzlemi ABCD üzerinde yatan her doğruya diktir. Bu nedenle ACG diktir. $\measuredangle CAG = \alpha$ ise

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ buradan

$\alpha = 45°$ elde edilir.



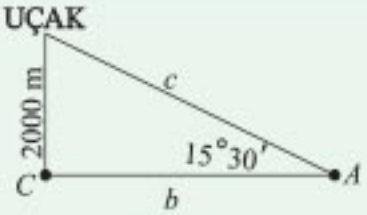
Şekil 1

ÖRNEK 2

Bir uçak 2000 m yükseklikte uçmaktadır ve havaalanına, $15°30'$ sabit alçalma açısıyla inişe başlamalıdır (şekil 2). Pistten hangi yatay uzaklıkta alçalmaya başlaması gerektiğini belirle. Uçağın, piste temas etmesi gereken noktaya olan en kısa uzaklığını belirle.

Şekil 2'deki dik üçgenden, uçağın pistten alçalmaya başlaması gereken yatay uzaklığının aslında b dik kenarının uzunluğu olduğu görülür; dolayısıyla
$b = 2000 \cdot \text{ctg}\, 15°30' \approx 7211{,}8$.

Uçağın piste temas etmesi gereken noktaya olan en kısa uzaklığı hipotenüs c'ye karşılık gelir; bu nedenle
$c = \frac{2000}{\sin 15°30'} \approx \frac{2000}{0{,}267238} = 7483{,}96\,\text{m}$.



Şekil 2

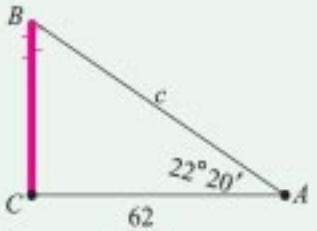
SORU 1

A noktasının üzerinde, 4000 metre yükseklikte bir uçak bulunmaktadır. Bu anda B noktası uçağa 17° açıyla görülmektedir. Uçağın B noktasına olan uzaklığını ve A ile B noktaları arasındaki uzaklığı belirle. Durumu gösteren bir şekil çiz.

ÖRNEK 3

Bir elektrik direğinin yüksekliğini hesapla: Tabanından 62 m uzaklıktaki bir noktadan, direk 22°20′ açıyla görülmektedir (şekil 3).

$\overline{BC} = 62 \cdot tg22°20' \approx 62 \cdot 0{,}41081 = 25{,}4702$ m.



Şekil 3

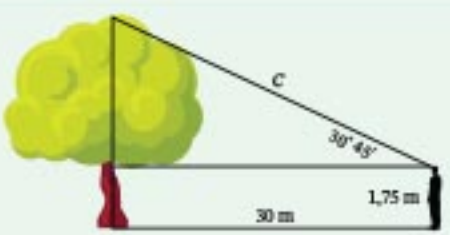
SORU 2

A noktasından direğin tepe noktası B ye olan uzaklığı hesapla (şekil 3).

ÖRNEK 4

Boyu 1 m 75 cm olan bir kişi, bir ağacın tepesini 30°45' açıyla görmektedir. Kişi ağaçtan 30 m uzaklıktadır. Ağacın yüksekliğini hesapla. Tepe (taç) yüksekliğinin kişinin göz yüksekliğiyle aynı düzeyden başladığını kabul et.

Şekil 4'ten taç yüksekliği
$30 \cdot \text{tg}\, 30°45' \approx 30 \cdot 0{,}594937 = 50{,}4255$, olur;
böylece ağacın yüksekliği
$50{,}4255 + 1{,}75 = 52{,}1755$ m'dir.



Şekil 4

SORU 3

Kişinin başından ağacın tepe noktasına olan uzaklığı belirle (şekil 4).

ÖRNEK 5

Bir nehir kıyısında yüksekliği 7 m olan bir ağaç vardır (şekil 5). Ağaç, nehrin karşı kıyısından 23°20' açıyla görülmektedir. Nehrin genişliğini hesapla.

Nehir genişliği

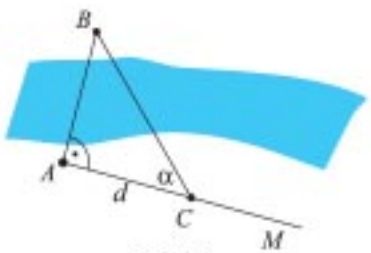
$$\frac{7}{tg23°20'} \approx \frac{7}{0{,}431358} = 16{,}2278\ \text{m}.$$



Şekil 5

SORU 4

(Şekil 6) Bir nehrin karşı kıyılarında bulunan A ve B noktaları arasındaki uzaklığı, d = $\overline{AC}$ ve açı α cinsinden ifade et.



Şekil 6

SORU 5

(Şekil 7) Şekilde dokuya uygulanan bir enjeksiyon gösterilmektedir. İğnenin dokuya giren kısmı 2 cm ve uygulama açısı 45° ise, iğnenin hangi derinlikte bulunması gerekir?



Şekil 7

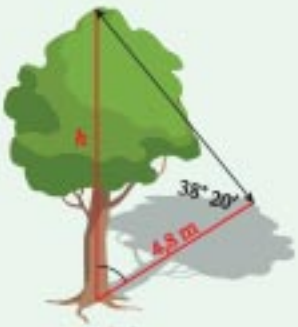
ÖRNEK 6

Güneş ışını yer yüzeyiyle 38°20' açı yaptığında bir ağacın gölgesi 4,84 m'dir. Ağacın yüksekliğini hesapla.

Dik üçgen kurulur (şekil 8). Buradan ağacın yüksekliği

$h = 4{,}8 \cdot \text{tg}\ 38°20' \approx 4{,}8 \cdot 0{,}7906 \approx 3{,}79\ \text{m}$

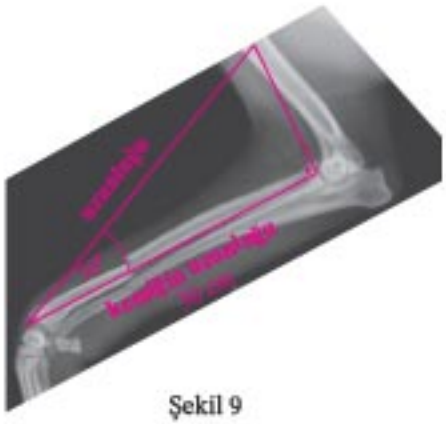
olarak bulunur.



Şekil 8

SORU 6

Şekil 9'daki röntgen görüntüsünde bir köpekte kemik kırığı gözlenmektedir. Köpeğin kemiğinin uzunluğu 30 cm'dir. Görüntüdeki verilere göre yerleştirilecek plakın uzunluğu ne olmalıdır?

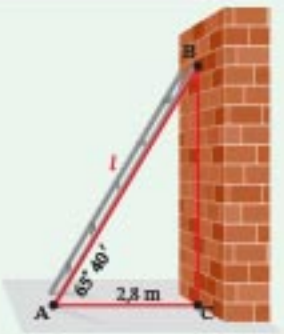


Şekil 9

ÖRNEK 7

İtfaiye merdiveni duvardan 2,8 m uzaklıktadır. Merdiven ile zemin arasındaki açı $65^\circ 40'$ tir. Merdivenin uzunluğunu belirle.

Dik açıyı duvar ile zemin arasında oluşturacak biçimde bir dik üçgen kurulur (şekil 10). O hâlde merdivenin uzunluğu $l = \frac{2{,}8}{\cos 65^\circ 40'} \approx \frac{2{,}8}{0{,}69879} \approx 4\,\text{m}$'dir.



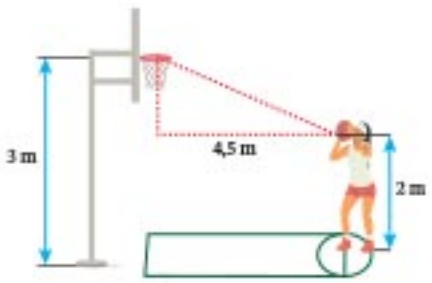
Şekil 10

SORU 7

Şekil 11'de, basketbolcunun gözleri zeminden 2 m yüksektedir ve pota zeminden 3 m yüksekliktedir.

Basketbolcu, pota merkezinden 4,5 m uzaklıktaki serbest atış çizgisindedir.

Pota merkezini hangi yükselme açısıyla gördüğünü belirle.



Şekil 11

ÖRNEK 8

Bir deniz feneri, bir gemiden $25{,}6^\circ$ açıyla görülmektedir. Gemi karaya doğru 1050 metre yaklaştıktan sonra açı $31{,}2^\circ$ olmaktadır. Fener, su seviyesinden hangi yükseklikte bulunmaktadır?

Gemi karaya 1050 m yaklaştıktan sonraki kıyıya yatay uzaklığı x ve fenerin su seviyesinden yüksekliğini y ile gösterelim (şekil 12). O hâlde $\text{ctg}\, 31{,}2^\circ = \frac{x}{y}$ ve $\text{ctg}\, 25{,}6^\circ = \frac{1050 + x}{y}$,

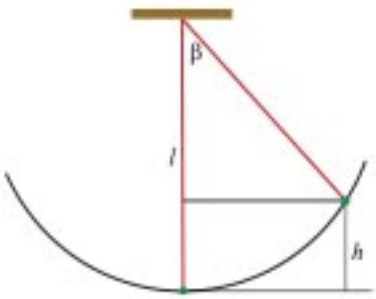
Buradan $x = y \operatorname{ctg} 31{,}2^\circ = 1{,}651y$
ve $y \operatorname{ctg} 25{,}6^\circ = 1050 + x$., $x = 1{,}651y$ yerine koyduğumuzda $2{,}087y = 1050 + 1{,}651y$, dolayısıyla $0{,}436y = 1050$. Buna göre $y = \dfrac{1050}{0{,}436} = 2410$ m.
Demek ki deniz feneri su düzeyinden 2410 metre yükseklikte bulunmaktadır.



Şekil 12

SORU 8

Şekil 13'te uzunluğu 30 cm olan bir sarkaç, en büyük 30° açıyla salınım yapmaktadır. Sarkaçın ulaştığı yüksekliği bul.



Şekil 13

ÖRNEK 9

Şekil 10'da uzun bir dikdörtgen kâğıt şeridin bir köşesi, karşı kenara ulaşacak biçimde AC boyunca katlanmakta ve θ açısı oluşmaktadır. Şeridin genişliği w ise, AC uzunluğunu w ve θ cinsinden ifade et.

θ açısı 0° ile 45° arasındadır. A noktasından karşı kenara indirilen normalin ayağı F olsun (şekil 11).
Dik üçgen AEF için $\measuredangle AEF = 2\theta$ ve $\overline{AF} = w$.

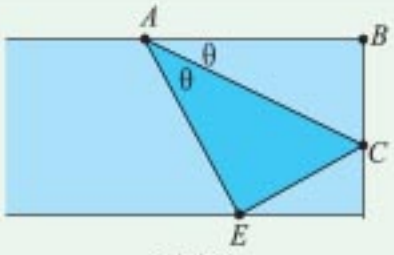
Buradan $\overline{AF} = \overline{AE} \sin 2\theta$ bu da

$\overline{AE} = \dfrac{\overline{AF}}{\sin 2\theta} = \dfrac{w}{\sin 2\theta}$ şeklindedir.

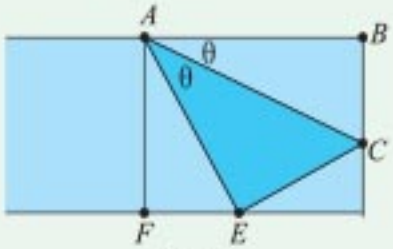
Dik üçgen AEC için $\measuredangle CAE = \measuredangle CAB = \theta$., dolayısıyla

$\overline{AE} = \overline{AC} \cos\theta$ buradan da

$\overline{AC} = \dfrac{\overline{AE}}{\cos\theta} = \dfrac{w}{\cos\theta \sin 2\theta}$. elde edilir.



Şekil 10



Şekil 11

SORU 9

Keops Piramidi, tabanı kenarı 230 m olan düzgün bir kare tabanlı piramittir; yüksekliği 147 m'dir.
a) Bir yan ayrıtın taban düzlemiyle yaptığı açıyı hesapla.

b) Aynı tepede kesişen bir yan ayrıt ile bir taban ayrıtının yaptığı açıyı hesapla.

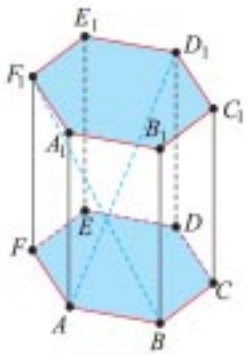
c) İki yan ayrıt arasındaki açıyı hesapla.

SORU 10

Güneşli bir günde, güneş panellerinin metrekare başına ortalama ürettiği enerji 0,8 kWh olsun. Alit'in evinin çatısı, kolları 12 metre olan ve aralarındaki açı 72° olan bir ikizkenar üçgen biçimindedir. Çatının tamamı güneş panelleriyle kaplanırsa, Alit'in ortalama üretebileceği enerjiyi belirle.

SORU 11

(Şekil 16) Bir depo, taban ayrıtı 2 m olan düzgün altıgen prizma biçimindedir. İçine destek kirişleri AD_1 ve BF_1 yerleştirilmiştir. AD_1 kirişi, tabandaki altıgenle 32° açı yapmaktadır. AD_1 ve BF_1 kirişlerinin uzunluklarını bul.



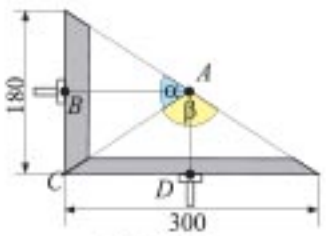
Şekil 16

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Yüksekliği H=140 m olan bir fabrikanın tepesinde bir baca bulunmaktadır. Fabrikadan 100 m uzaklıktaki A noktasından baca $\alpha=56°$ açıyla görülüyor. Bacanın yüksekliğini hesapla.

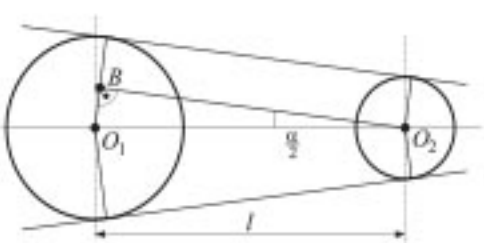
2. Yükseklikleri 20 m ve 17 m olan iki direk, birbirinden 50 m uzaklıktadır.
   a) İki direğin tepe noktalarına gerilmiş elektrik kablosunun uzunluğunu hesapla.
   b) Kablonun, direklerle yaptığı açıları hesapla.

3. (Şekil 17) Bir çift konik dişlinin dış çapları 180 mm ve 300 mm'dir. Her bir konik dişlinin tepe açısını, yani şekildeki α\alpha ve β\beta açılarını hesapla.



Şekil 17

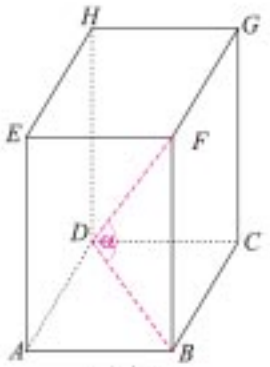
4. (Şekil 18) Çapları 2 m ve 1,2 m olan iki kasnaklı bir kayış düzeneğinde, kasnak merkezleri arası uzaklık l=3 m'dir. Kayışın yaptığı açıyı hesapla.



Şekil 18

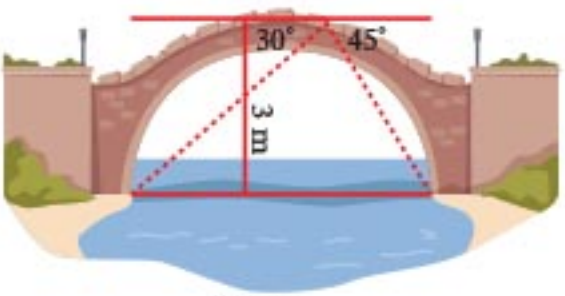
5. Bir dağın eteklerinden tepesine, yer yüzeyiyle $\alpha = 46°30'$ açı yapan, uzunluğu 1500 m olan doğrusal bir teleferik hattı kuruludur. Dağın yüksekliğini hesapla.

6. (Şekil 19) *ABCDEFGH* düzgün dörtgen prizması olsun; taban ayrıtı a=7 cm ve yüksekliği h=12 cm. Açı α'nın ölçüsünü belirle.



Şekil 19

7. (Şekil 20) Bir köprünün üzerindeki tek bir noktadan, bir kıyı 30°, öteki kıyı 45° açıyla görülmektedir. Köprü, su seviyesinden 3 m yüksektir. Nehrin genişliğini bul.

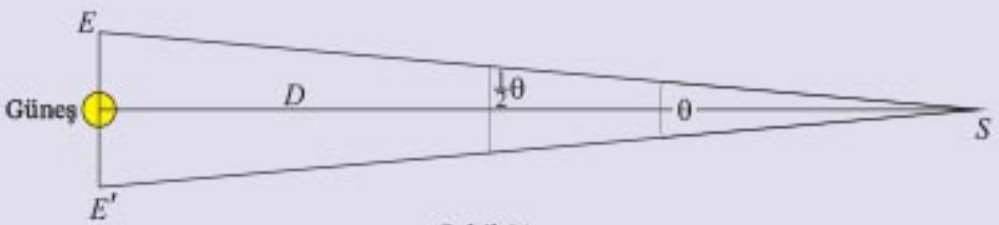


Şekil 20

ARAŞTIRMA

Bir yıldız ile Dünya arasındaki uzaklık şu formülle verilir: $D = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}$ burada D uzaklık, b ise taban uzaklığıdır (genellikle Dünya–Güneş uzaklığının iki katı, yaklaşık 300 000 000 km); θ ise yıldızın, bu tabanın uç noktalarından bakıldığında görülen açı farkıdır. Güneş dışındaki en yakın yıldız Proxima Centauri ve θ=0,768 saniyedir.

Dünya ile Proxima Centauri arasındaki uzaklığı kilometre ve ışık yılı birimlerinde hesapla (bir ışık yılı $9.46 \cdot 10^{12}$ km). Proxima Centauri dışındaki öteki yıldızlar için de bu parametreleri araştır.

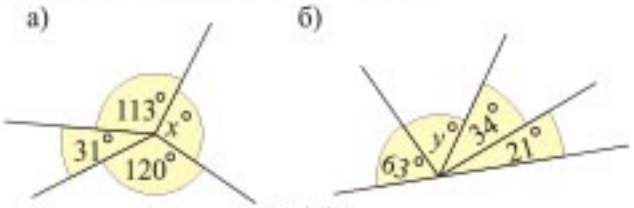


Şekil 21

4.12. İki Doğrunun Bir Keseni Üzerindeki Açılar

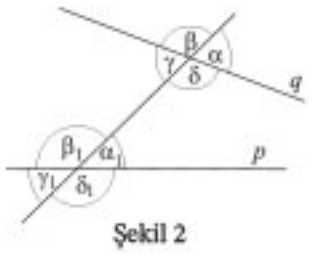
SORU 1

Şekil 1'deki verilere göre bilinmeyen açının ölçüsünü belirle.



Şekil 1

İki farklı p ve q doğrusu (şekil 2) aynı düzlemde olsun.
Bu doğruları kesen üçüncü doğruya kesen **transversal** denir ve a ile gösterilsin. Böylece α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1 VE δ_1 açıları oluşur; bunlara kesenin oluşturduğu açılar ya da **transversalin açıları** denir.



Şekil 2

Aşağıdaki kesen açı çiftleriyle ilgili ifadelerden hangileri doğrudur?

a) α ve β dış açılardır. b) α_1 ve γ ters açılardır (alternatif).

c) α_1 ve δ yöndeş (sözdeştir/corresponding) açılardır.

d) α ve γ_1 ters açılardır. e) α_1 ve β_1 iç açılardır.

α, β, γ_1 ve δ_1 dış; α_1, β_1, γ ve δ iç açılardır.

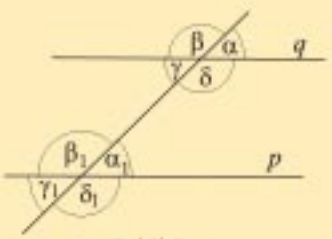
Açıların adı	Tanım	Şekil 2'deki örnek gösterimler
Yöndeş açılar	Kesenin aynı tarafında bulunan, biri iç diğeri dış ve ortak tepe noktası olmayan açı çifti	α ile α_1, β ile β_1, γ ile γ_1, δ ile δ_1
Ters açılar	Kesenin farklı taraflarında bulunan, ikisi de dış veya ikisi de iç olan ve ortak tepe noktası olmayan açı çifti	α ile γ_1, β ile δ_1, δ ile β_1, γ ile α_1
Aynı taraftaki açılar (iç/dış)	Kesenin aynı tarafında bulunan, ikisi de iç veya ikisi de dış olan ve ortak tepe noktası olmayan açı çifti	α ile δ_1, β ile γ_1, γ ile β_1, δ ile α_1

Eğer iki paralel doğruyu üçüncü bir doğru keserse:

a) Yöndeş açılar birbirine eşittir.

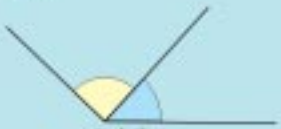
b) Ters (alternatif) açılar birbirine eşittir.

c) Aynı taraftaki iç açılar tümler değil, bütünlerdir (şekil 3).



Şekil 3

Ortak bir kenarı ve tepe noktası olup, iç bölgeleri bu kenarın iki yanında yer alan açılara **komşu açılar** denir (şekil 4). Bir doğru açı oluşturan iki komşu açıya **doğrusal komşu açılar** denir (şekil 5).



Şekil 4



Şekil 5

İki doğrusal komşu açının toplamı 180°' dir. Doğrusal komşu açılar bütünlerdir, ancak her iki bütünler açı çifti doğrusal komşu olmak zorunda değildir.

Ortak bir tepe noktasına sahip olup kolları iki doğruyu oluşturan iki açıya ters (tepe) açılar denir.

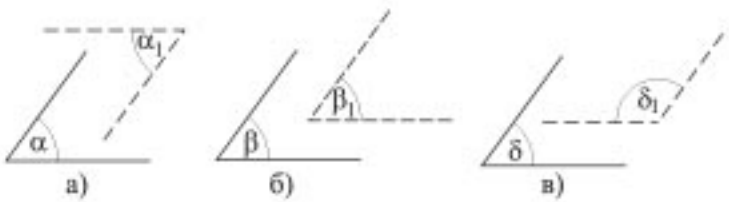
Ters açılar birbirine eşittir.

Şekil 6'da kolları paralel olan açılar gösterilmiştir:

a) α ve α_1 zıt yönlü,

b) β ve β_1 aynı yönlü,

c) δ ve δ_1 kollarından biri aynı, diğeri zıt yönlüdür.

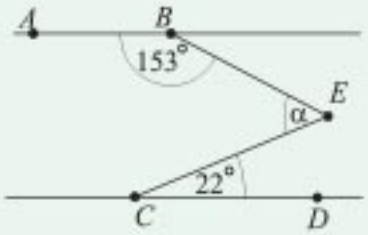


Şekil 6

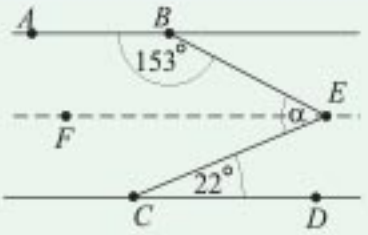
Paralel kenarları aynı veya zıt yönde olan açılar birbirine eşittir, bir kenarı aynı, diğer kenarı zıt yönde olan açılar ise bütünler açılardır.

ÖRNEK 1

Şekil 7'de AB ve CD doğruları paraleldir. Şekildeki verilere göre $\alpha = m(\angle BEC)$ açısının ölçüsünü belirle.



Şekil 7

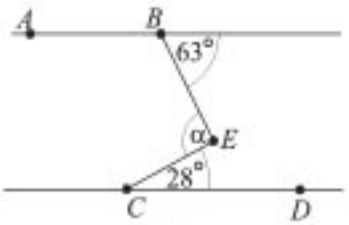


Şekil 8

E noktasından AB ve CD doğrularına paralel bir doğru çiz ve bu doğru üzerinde E'den farklı bir F noktası seç. O hâlde $m(\angle FEC) = m(\angle DCE) = 22°$ alternatif açılar ve $m(\angle BEF) + m(\angle ABE) = 180°$, yani $m(\angle BEF) = 27°$ bütünler açılar olur (şekil 8). Bu yüzden $\alpha = 27° + 22° = 49°$.

SORU 1

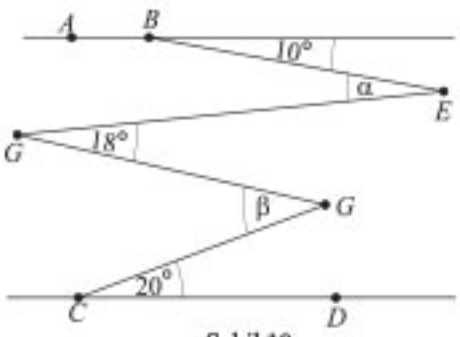
Şekil 9'da AB ve CD doğruları paraleldir. Şekildeki verilere göre α açısının ölçüsünü belirle.



Şekil 9

SORU 2

Şekil 10'da AB ve CD doğruları paraleldir. Şekildeki verilere göre α ve β açılarını belirle.



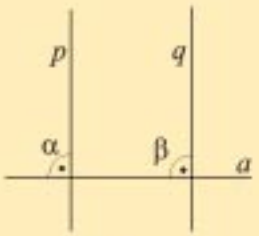
Şekil 10

ETKİNLİK

Dinamik geometri yazılımı ile iki paralel doğru inşa et ve 1 ile 2 numaralı alıştırmalara benzer görevlerde açıları hesapla. Bir kural çıkarmaya çalış.

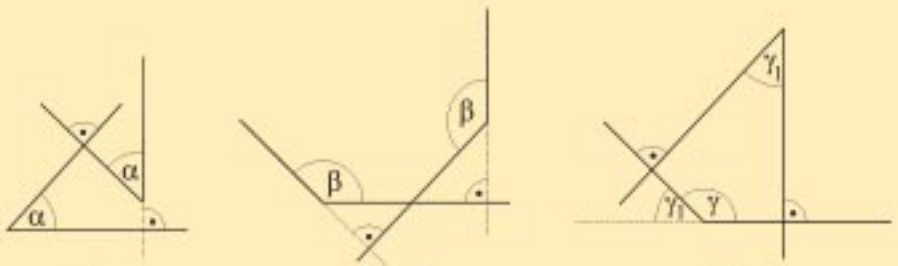
Aynı kural, daha karmaşık bir durumda — örneğin iki paralel doğru arasında üç veya daha çok noktanın birbirine doğru parçalarıyla bağlanıp bilinmeyen açılar oluşturduğu hâllerde — de geçerli olur mu?

p ve q iki paralel doğru olsun. Eğer p, a doğrusuna dik (p ⊥ a) ise, o hâlde q da a doğrusuna diktir (şekil 11).



Şekil 11

Kenarları (kolları) karşılıklı olarak dik olan iki açı, her ikisi dar ise eşittir (şekil 12a), her ikisi geniş ise eşittir (şekil 12b); biri dar diğeri geniş ise bütünlerdir (şekil 12c).



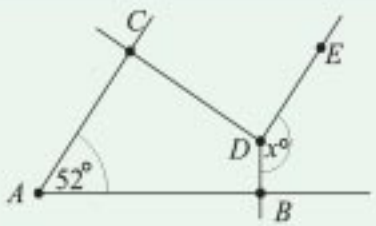
а) б) в)

Şekil 12

ÖRNEK 2

$AC \parallel DE$, $AC \perp CD$ ve $AB \perp BD$ olsun (şekil 13). Eğer $\angle BAC = 52°$ ise, $\measuredangle BDE$ kaç derecedir?

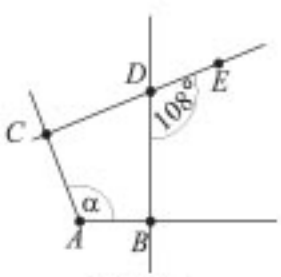
$\measuredangle BAC$ ile $\measuredangle CDB$, kenarları karşılıklı dik olan açılardır; biri geniş, diğeri dar olduğundan bütünlerdir.
Bu nedenle $\measuredangle CDB = 180° - 52° = 128°$.
$AC \parallel DE$ ve $AC \perp CD$ olduğundan $\measuredangle EDC = 90°$'dır.
Son olarak $90° + x° + 128° = 360° \Rightarrow x° = 142°$.
Demek ki $\angle BDE = 142°$.



Şekil 13

SORU 3

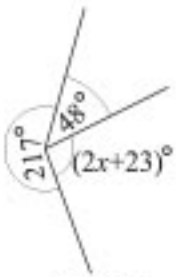
$\measuredangle BAC$ ve $\measuredangle CDB$, kenarları karşılıklı dik olan açılar olsun (Şekil 14).
$\measuredangle BDE = 108°$ ise, α açısının değerini belirle.



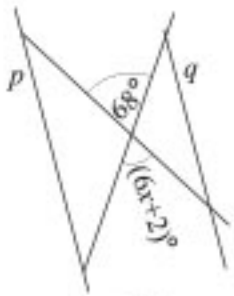
Şekil 14

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Şekil 15, 16 ve 17'de verilen değerlere göre x in değerini - ölçüsünü belirle.

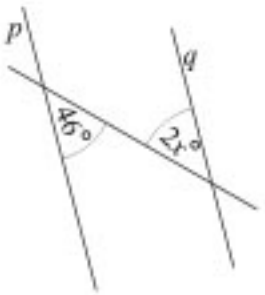


Şekil 15



$p \parallel q$

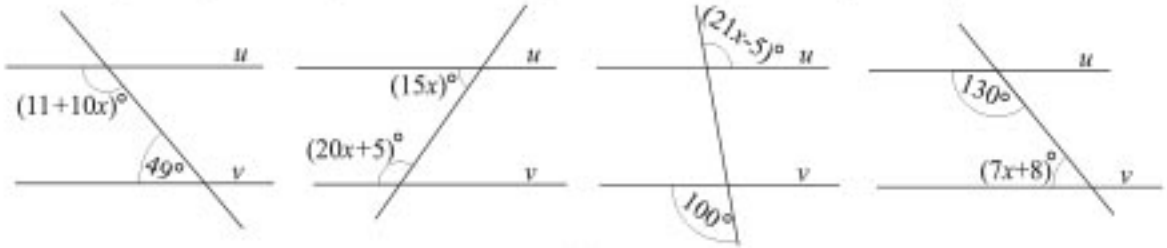
Şekil 16



$p \parallel q$

Şekil 17

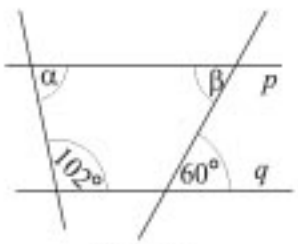
2. u ve v doğruları paralel ise, şekil 18'deki her çizimde x ile gösterilen sayının değerini bul.



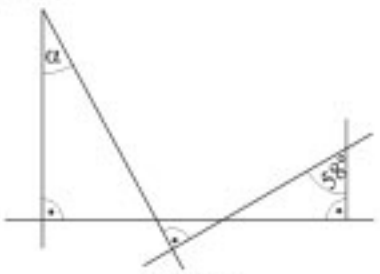
Şekil 18

3. Şekil 19'a göre α ve β açılarını belirle.

4. Şekil 20'deki verilere göre α açısını belirle.



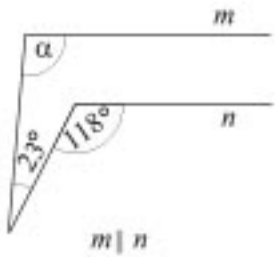
Şekil 19



Şekil 20

5. Aşağıdakilere göre α açısını belirle:

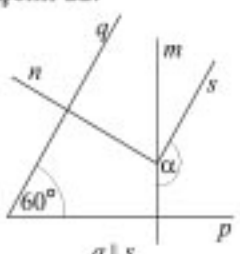
a) Şekil 21,



$m \parallel n$

Şekil 21

b) Şekil 22.

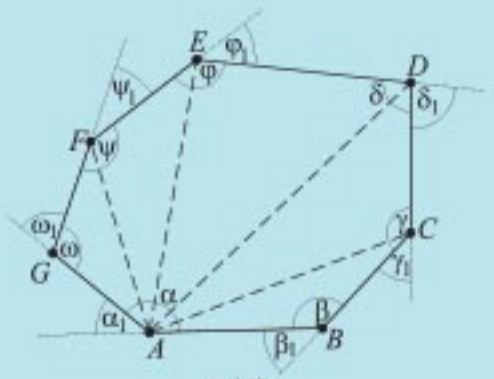


$q \parallel s$
$m \perp p$ $n \perp q$

Şekil 22

4.13. Çokgen

Bir çokgende, uçları çokgen üzerinde bulunan her doğru parçasının (kesitin) tüm noktaları da çokgenin içinde kalıyorsa, bu çokgene dışbükey çokgen denir; aksi hâlde içbükey çokgen denir. Uçları, çokgenin komşu olmayan iki köşesi olan doğru parçasına köşegen denir (şekil 1).



Şekil 1

SORU 1

Bir beşgen çiz ve bu beşgende bir köşeden kaç köşegen çekilebileceğini hesapla.

Bir çokgendeki tüm köşegenlerin sayısı $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ formülüyle hesaplanır; burada n, çokgenin kenar sayısını gösterir.

SORU 2

Aşağıdakilerde tüm köşegenlerin sayısını hesapla:
a) yedigen, b) sekizgen, c) yirmigen.

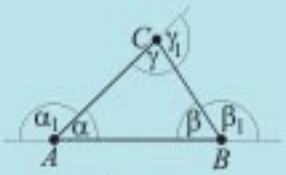
Bir çokgende, ardışık iki kenarın oluşturduğu açıya **iç açı** denir. Şekil 1'de bunlar $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi, \omega$ ile gösterilmiştir. İç açıların sayısı, kenar (ve köşe) sayısına eşittir. Bir köşeden çizilen köşegenler çokgeni $(n-2)$ üçgene böler; buradan iç açılar toplamı: $C_n = (n-2) \cdot 180^\circ$. Her iç açıya doğrusal komşu olan dıştaki açıya **dış açı** denir ekil 1'de $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \phi_1, \psi_1, \omega_1$. Dış açılar toplamı:
$n \cdot 180^\circ - C_n = n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$'dır.

SORU 3

Verilen geometrik şekillerin iç açılar toplamını hesapla:
a) Dörtgen b) Altıgen c) Ongen

Üçgen

Bir üçgende, iç açılara doğrusal komşu olan açılar dış açılardır (şekil 2; α_1, β_1 ve γ_1 $\triangle ABC$'nin dış açılarıdır).

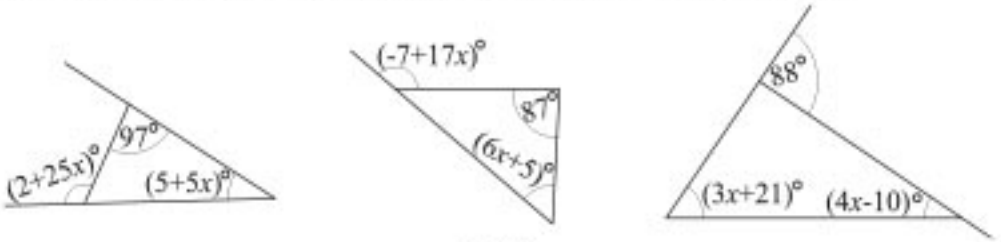


Şekil 2

Her bir dış açı, kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir. Bir üçgendeki dış açılar toplamı 360°'dir.

SORU 4

Şekil 3'teki her alt şekilde, verilenlere göre bilinmeyen x° açısının değerini bul.



Şekil 3

ÖRNEK 1

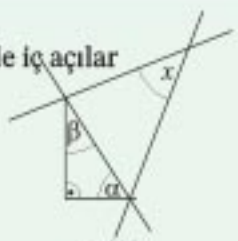
Dik üçgende, hipotenüsün uçlarındaki dış açıların açıortayları birbirini 45°'lik açıyla keser. Kanıtla.

Hipotenüs uçlarındaki açılar α ve β olsun (şekil 4). Dış açıların açıortayları ile hipotenüsün oluşturduğu üçgende iç açılar

$90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} + x^\circ = 180^\circ$ olur.

Buradan $x^\circ = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

elde edilir.



Şekil 4

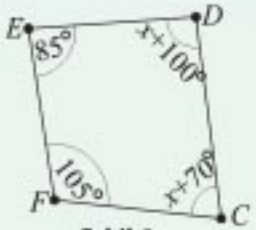
Dörtgen

Bir dörtgende iç açılar toplamı 360°'dir.
Bir dörtgende dış açılar toplamı da 360°'dir.

ÖRNEK 2

Şekil 5'teki dörtgende, D tepesindeki açının ölçüsünü belirle.

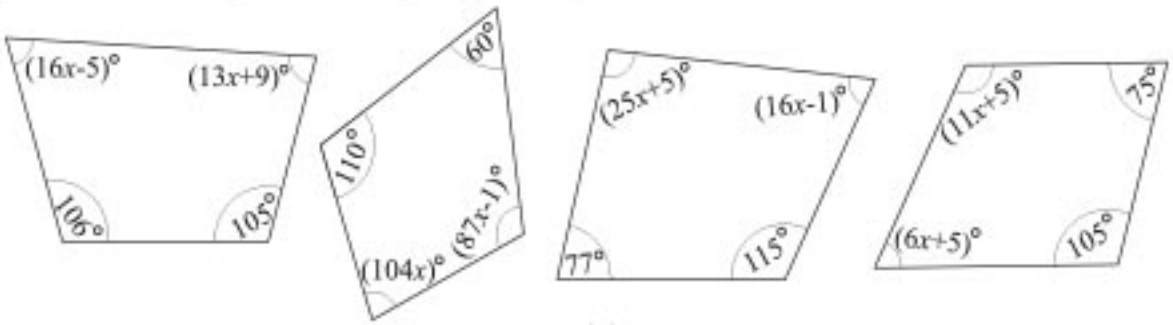
İç açıların toplamı 360° olduğundan
$105° + x + 70° + x + 100° + 85° = 360°$
buradan $x = 0°$ bulunur;
dolayısıyla D tepesindeki
açı 100° olur.



Şekil 5

SORU 5

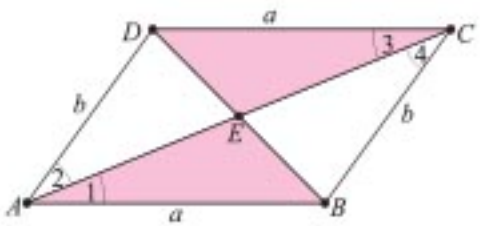
Şekil 6'daki her dörtgende bilinmeyen açıların ölçülerini bul.



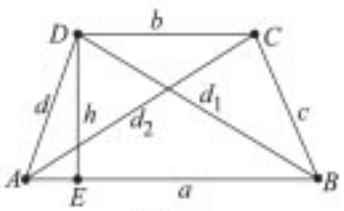
Şekil 6

Dörtgenler, karşılıklı paralel kenar çiftlerinin sayısına göre sınıflandırılır:

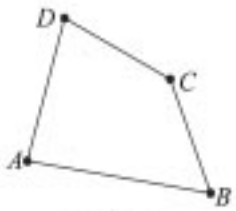
- **Paralelkenarlar**: İki çift paralel kenarı vardır. Özellikler: karşılıklı kenarlar eşit, karşılıklı açılar eşit, komşu açılar bütünler, köşegenler kesişme noktalarında birbirlerini iki eş parçaya böler (şekil 7).
- **Yamuklar**: Bir çift paralel kenarı vardır. Özellik: ayaklar üzerindeki komşu açılar bütünlerdir (şekil 8).
- **Paralel kenarı olmayan dörtgenler**: Hiçbir paralel kenar çifti yoktur (şekil 9).



Şekil 7



Şekil 8



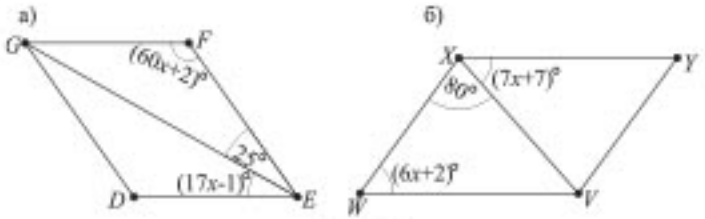
Şekil 9

SORU 6

Bir paralelkenarda bilinmeyen açıyı bul:

a) Şekil 10a'da ∠GFE,

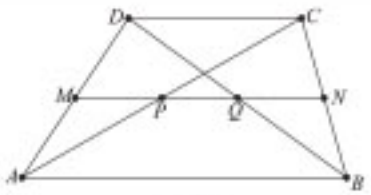
b) Şekil 10b'de ∠WVY.



Şekil 10

ÖRNEK 3

ABCD yamuğunda ($\overline{AB} > \overline{CD}$) orta doğru MN, köşegen AC'yi P noktasında, köşegen BD'yi Q noktasında keser. $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{CD}\right)$ olduğunu kanıtla.



Şekil 11

MP, △CDA'nın orta doğrusudur; buradan $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ elde edilir. MQ, △ABD'nin orta doğrusudur; buradan $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ elde edilir. Öyleyse $\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{CD}\right)$

Düzgün Çokgen



Bir çokgen, bütün kenarları eşit ve bütün iç açıları eşit ise **düzgün çokgen** adını alır.

Not. Düzgün üçgen, eşkenar üçgendir; düzenli dörtgen, karedir. Kare olmayan bir romb, iç açıları eşit olmadığı için düzenli dörtgen değildir.

ÖRNEK 4

Düzgün bir n-gende aynı köşedeki bir dış açı ile bir iç açının oranı 1:14'tür. Bu çokgendeki toplam köşegen sayısını belirle.

Düzenli çokgende aynı köşedeki iç açı α ile dış açı β° bütün olduğunu biliyoruz. $\alpha+\beta=180°$
$\beta : \alpha = 1 : 14$ olduğundan $\alpha=14\beta$ ve buradan $\beta = 12°$ bulunur. Düzenli n-gende (n kenarlı çokgen) bir dış açı 360° olduğuna göre $n = \frac{360°}{12°} = 30$. Buna göre, düzenli otuzgenden toplam köşegen sayısı $\frac{30 \cdot (30-3)}{2} = 405$ olur.



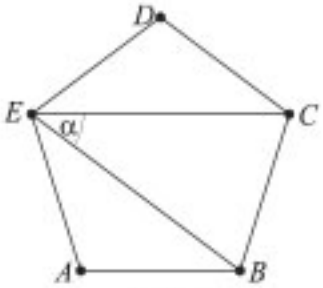
Düzgün bir n-gende bir dış açının ölçüsü $\frac{360°}{n}$, bir iç açının ölçüsü $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$'dir

ALIŞTIRMA SORULARI

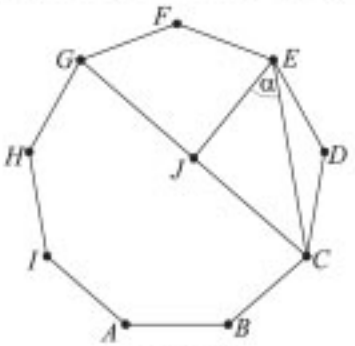
1. Hangi çokgende iç açılar toplamı:: a) 2700°, b) 4320°, c) 5040° olur, belirle.

2. Bir çokgende toplam 14 köşegen çizilebilmektedir. Bu çokgenin türünü belirle.

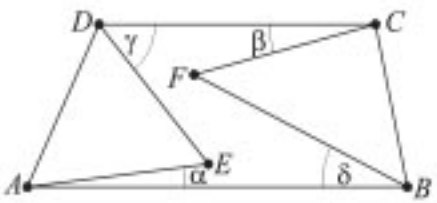
3. *ABCDE* Düzgün beşgen olsun (şekil 12). Bilinmeyen α açısını belirle.



Şekil 12



Şekil 13

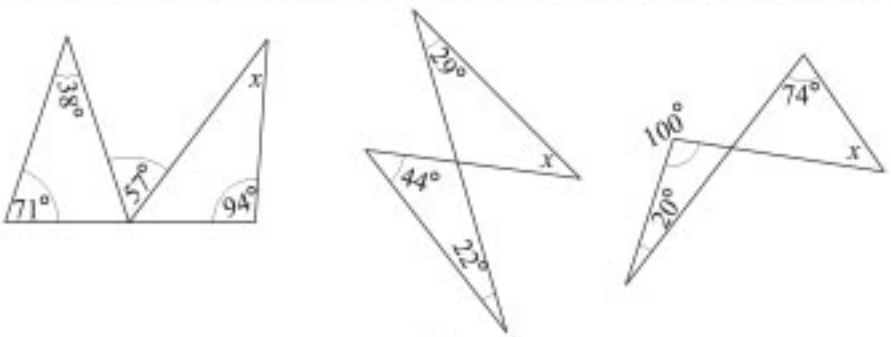


Şekil 14

4. *ABCDEFGHI* düzgün dokuzgen olsun ve $EJ \perp CG$ (şekil 13). Bilinmeyen α açısını belirle.

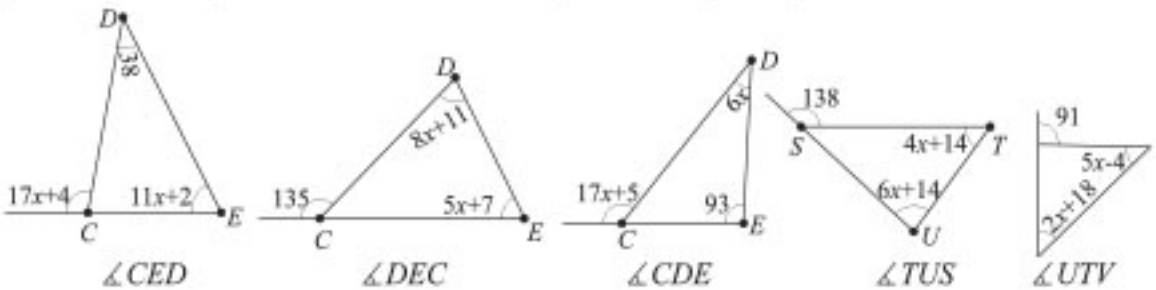
5. Yamuk ABCD'de $\alpha = 7°$, $\beta = 15°$, $\gamma = 51°$ ve $\delta = 27°$ verilsin. $\measuredangle$ BFC ve $\measuredangle$ DEA ölçülerini belirle (şekil 14).

6. Şekil 15'teki her alt şekilde, bilinmeyen açının (derece cinsinden) ölçüsünü belirle.



Şekil 15

7. Şekil 16'da tüm açılar derece cinsinden verilmiştir. Bilinmeyen x açısını belirle.



Şekil 16

8. İkizkenar bir üçgende tepe açısı, taban açısından 30° daha büyüktür. Üçgenin tüm iç ve dış açılarını belirle.

9. ABC üçgeninde, C tepesindeki dış açının açıortayı, AB doğrusunu 45° açı ile kesmektedir. $\angle ABC = 35°$'tır. Üçgenin açılarını belirle.

10. Bir rombda, bir kenar ile köşegen arasındaki açının açıortayı, rombun öteki kenarını 72° açı ile kesmektedir. Rombun açılarını belirle.

ARAŞTIRMA

İnşaat, mimarlık ve otomotiv endüstrilerinde en sık kullanılan açıları araştır.

4.14. Çember Ve Daire

ETKİNLİK

"Londra Gözü" (London Eye), çapı 120 m olan döner bir çarktır (Resim 1). Üzerine yerleştirilmiş 32 kabin, Londra üzerinde en çok 135 m yüksekliğe ulaşır. Merkezden bakıldığında iki komşu kabinin gördüğü merkez açısını belirle. Şekil 2'de işaretli $\overset{\frown}{AB}$ yayını en büyük açı ile hangi kabinden göreceğini keşfet. Varsayımlarını geometri yazılımı ile kontrol et.



Resim 1

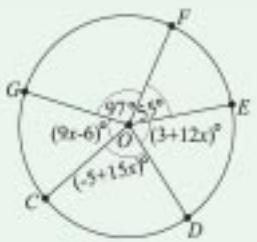


Resim 2

ÖRNEK 1

Şekil 1'deki verilere göre $\measuredangle COG$ açısının ölçüsünü belirle.

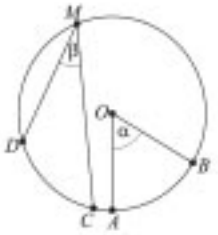
$(9x)° - 6° - 5° + (15x)° + 3° + (12x)° + 55° + 97° = 360°$
eşitliğinden $x = 6°$ elde edilir. Buna göre
$\measuredangle COG = 9 \cdot 6° - 6° = 48°$.



Şekil 1

SORU 1

Şekil 2'de α ve β açıları verilmiştir. α açısının adını hatırla, β açısının adını hatırla. Bir çemberde eşit yaylara karşılık gelen iki merkez açı nasıldır? Tersi de geçerli midir?



Şekil 2

Bir çemberde aynı yay üzerinde gördürülen tüm çevre açıları birbirine eşittir (şekil 3).

Bir yarımçember üzerinde gördürülen her çevre açısı dik açıdır (Thales teoremi, şekil 4).


Şekil 3



Şekil 4

SORU 2

Bir çevre açıyı iki katına çıkarırsan, merkez açı nasıl değişir?

Bir çemberde, aynı yay için çevre açının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısıdır.

ÖRNEK 2

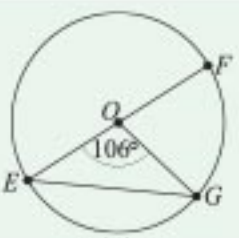
Aynı yay üzerindeki bir merkez açı ile çevre açının toplamı 210° dir. Merkez açıyı belirle.

Merkez açıyı α ile gösterirsek: $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 210°$, dolayısıyla $\alpha = 140°$.

ÖRNEK 3

Eğer $\measuredangle EOG = 106°$ ise $\measuredangle GEF$ açısının ölçüsünü belirle (şekil 5).

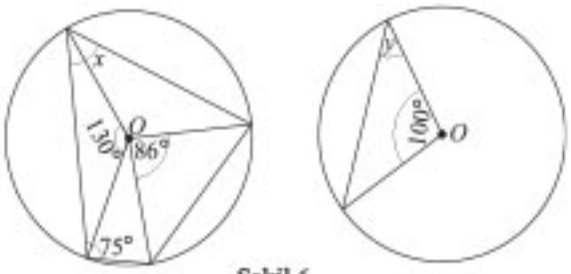
$\measuredangle EOF = 180°$ olduğundan $\measuredangle GOF = 74°$ olur.
Aynı yay için çevre açı, merkez açının yarısıdır:
$\measuredangle GEF = \left(\frac{74}{2}\right)^{\circ} = 37°$.



Şekil 5

SORU 3

Şekil 6'daki verilere göre x ve çevre açılarının (derece cinsinden) değerlerini belirle.



Şekil 6

ÖRNEK 4

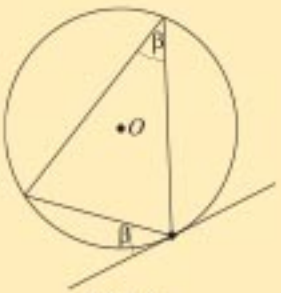
Şekil 7'deki verilere göre bilinmeyen x açısını (derece cinsinden) belirle.

$\measuredangle CFB = \measuredangle CAB$ aynı yay üzerindeki çevre açılar olduğundan eşittir. Thales teoreminden $\measuredangle BCA = 90° - 56° = 34$ elde edilir.



Şekil 7

Bir çemberde, bir kiriş ile o kirişi kesen teğet arasındaki açı, aynı kirişi gören çevre açıya eşittir (Şekil 8).



Şekil 8

ETKİNLİK

Yukarıdaki özelliği ispatla: Kiriş ile teğet arasındaki açının, o kirişe karşılık gelen merkez açının yarısına eşit olduğunu göster.

SORU 4

Şekil 9'daki verilere göre bilinmeyen x ve y açılarını belirle.



Şekil 9

ÖRNEK 5

$\measuredangle VOU = 137°$ ve $\measuredangle HOW = 55°$ (şekil 10). $\measuredangle VTU$ açısını belirle.

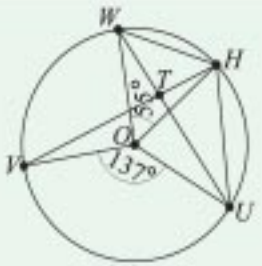
Aynı yayı gören çevre açı, merkez açının yarısıdır:

$\measuredangle WUH = \frac{\measuredangle WOH}{2} = \left(\frac{55}{2}\right)^\circ$ ve

$\measuredangle VHU = \frac{\measuredangle VOU}{2} = \left(\frac{137}{2}\right)^\circ$.

∠VTU, ΔTUH için bir dış açıdır ve değeri, komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir:

$\measuredangle VTU = \left(\frac{55}{2}\right)^\circ + \left(\frac{137}{2}\right)^\circ$.

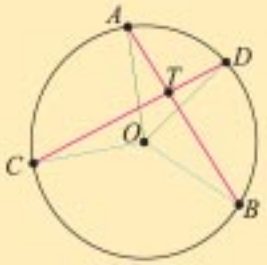


Şekil 10

Bir çemberde İç kesişen iki kirişin oluşturduğu açı AB ve CD, içte T noktasında kesişsin (şekil 11). O hâlde

$\measuredangle CTB = \frac{\measuredangle COB}{2} + \frac{\measuredangle AOD}{2}$ ve

$\measuredangle ATC = \frac{\measuredangle AOC}{2} + \frac{\measuredangle DOB}{2}$

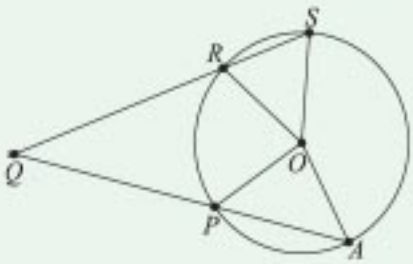


Şekil 11

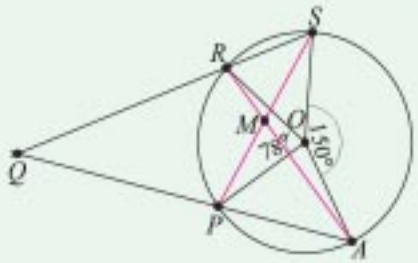
ÖRNEK 7

$\measuredangle POR = 78°$ ve $\measuredangle AOS = 150°$ değerleri verilmişse (şekil 12), $\measuredangle PQR$ açısını belirle.

$\measuredangle ARS = \left(\frac{150}{2}\right)^\circ = \measuredangle APS$ ve $\measuredangle PSR = \left(\frac{78}{2}\right)^\circ = \measuredangle PAR$ ise, $\measuredangle PMR = \left(\frac{78}{2}\right)^\circ + \left(\frac{150}{2}\right)^\circ$ dir. (Şekil 13)



Şekil 12



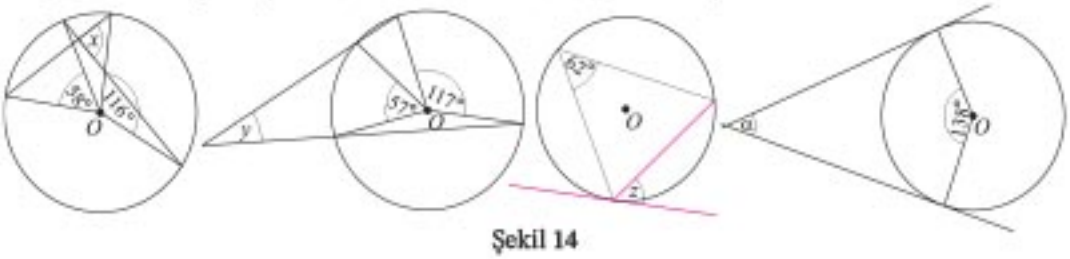
Şekil 13

O zaman $\measuredangle PQR = 360° - \left(\frac{78}{2}\right)^\circ - \left(\frac{150}{2}\right)^\circ - 2\left(180° - \left(\frac{150}{2}\right)^\circ\right) = \left(\frac{150}{2}\right)^\circ - \left(\frac{78}{2}\right)^\circ$.

Dıştaki bir noktadan çembere çizilen iki kesen arasındaki açı (şekil 12), karşılık gelen merkez açılarının yarı farkına eşittir: $\measuredangle AQS = \frac{\measuredangle AOS}{2} - \frac{\measuredangle POR}{2}$.

SORU 5

Şekil 14'e göre bilinmeyen açının (derece cinsinden) değerini - ölçüsünü belirle.



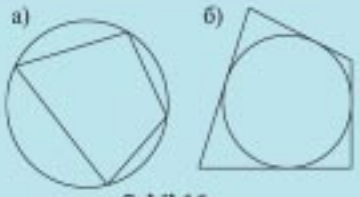
Şekil 14

SORU 6

Dik kenarları a ve b, hipotenüsü c olan bir dik üçgende, içten teğet olan çemberin yarıçapı r için $r = \frac{a+b-c}{2}$ geçerli olduğunu kanıtla.

Kirişsel ve Teğetsel Dörtgenler

Kenarları aynı çemberin kirişleri olan dörtgene **kirişsel dörtgen** denir (şekil 15a).
Kenarları bir çembere teğet olan dörtgene **teğetsel dörtgen** denir (şekil 15b).



Şekil 15

Kirişsel dörtgende karşılıklı iç açılar bütünlerdir. Teğetsel dörtgende karşılıklı kenar uzunluklarının toplamları eşittir.

Not. Dikdörtgen, kare ve ikizkenar yamuk kirişsel dörtgen örnekleridir. Eşkenar dörtgen (romb), kare ve deltoid teğetsel dörtgen örnekleridir.

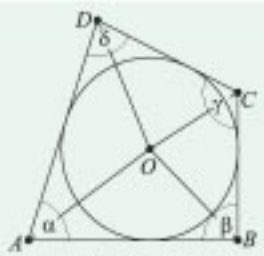
ÖRNEK 8

Teğetsel dörtgen ABCD verilsin. İçte teğet çemberin merkezi O olsun. $\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180°$ olduğunu kanıtla (şekil 16).

ABCD teğetsel olduğundan
AO,BO,CO,DO doğruları sırasıyla iç açılarının açıortaylarıdır.
$\triangle$AOB için:

$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$$

$$= 360 - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 360° - 180° = 180°$$



Şekil 16

Her düzgün çokgene bir içte teğet çember çizilebilir. Her düzgün çokgenin dışına da bir çember çizilebilir. İçte teğet çemberin ve dıştan çizilen çemberin merkezleri çakışıktır ve çokgenin herhangi iki ardışık köşesiyle birlikte **karakteristik üçgeni** oluşturur.

ÖRNEK 9

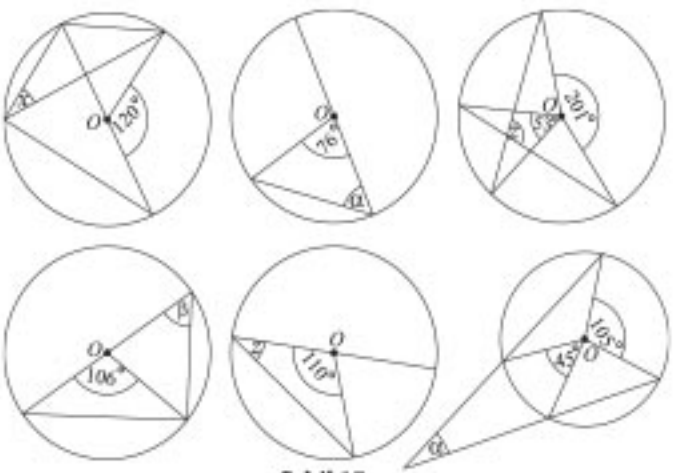
Kenar uzunluğu a=10 cm olan düzgün altıgende, içten teğet çemberin yarıçapını r ve dıştan çizilen çemberin yarıçapını R belirle.

Düzgün altıgende karakteristik üçgen, tepe açısı $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ olan ikizkenar üçgendir; yani eşkenar üçgendir. İçte teğet çemberin yarıçapı, eşkenar üçgenin yüksekliği ile çakışıktır; bu nedenle $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm. Dıştan çizilen çemberin yarıçapı, altıgenin kenar uzunluğuna eşittir; dolayısıyla R=a=10 cm'dir.

Düzgün n-gen için içte teğet yarıçap $r = \frac{a}{2} \cdot \text{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, dıştan çizilen yarıçap $R = \frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$ Bağıntılarıyla (formulleriyle) hesaplanır.

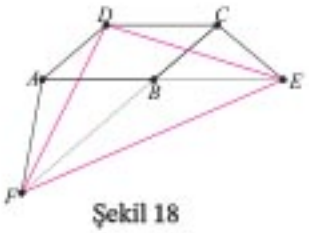
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir yayın gördürdüğü çevre açı 36° dir. Bu yay çemberin hangi kesrine karşılık gelir, belirle.
2. Çemberin $\frac{1}{20}$'lik kısmına karşılık gelen yayın çevre açısı kaç derecedir, belirle.
3. Bir kiriş, çemberi oranı 3:5 olan iki yaya ayırmaktadır. Bu yaylara karşılık gelen merkez açıları kaç derecedir, belirle.
4. Bir dik üçgende dar açılardan biri 32° dir (Şekil 17). Bu üçgenin çevrel çemberinin merkezinden bakıldığında, her bir dik kenar hangi açıyla görülür, belirle.
5. Şekil 17'deki her alt şekilde, verilenlere göre bilinmeyen açıyı derece cinsinden belirle.



Şekil 17

6. ABCD bir paralelkenar olsun (Şekil 18). E ve F noktalar, sırasıyla AB ve BC doğruları üzerinde yer alır; öyle ki AFB ve CBE üçgenleri ikizkenardır ($\overline{AF} = \overline{AB}$ ve $\overline{BC} = \overline{CE}$).
Üçgen DFE'nin de ikizkenar olduğunu kanıtla.



Şekil 18

ARAŞTIRMA

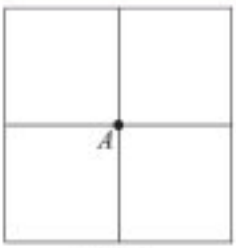
Bir geometri yazılımında, yarıçapı rastgele olan bir çember çiz. Bu çember içine bir dik üçgen ABC yerleştir. Dik açının köşesi C den hipotenüs AB'ye çekilen yüksekliği CD çiz. Kenarları AD ve BD olan dikdörtgen ile kenarı CD olan karelerin alanlarını incele.

Ne gözlüyorsun?

4.15. Düzlemde Verilen Bir Alanın Kaplanması

ÖRNEK 1

Düzlemde rastgele bir A noktasına, şekil 1'deki gibi tam 4 kare yerleştirebilirsin; çünkü karenin her iç açısı $90°$ dir ve $360° = 4 \cdot 90°$ olur.



Şekil 1

SORU 1

Ortak bir köşeleri olacak şekilde, ikizkenar dik üçgenleri yan yana yerleştir; üçgenler birbirini örtmesin ve arada boşluk kalmasın. Kaç tane üçgen yerleştirmen gerekir?
Bir geometri yazılımı ile çöz; tek bir üçgenden kopyalar oluştur, ötelemeler ve döndürmeler yap.

SORU 2

Rastgele bir noktada, ortak bir köşeleri olacak şekilde eşkenar üçgenler yerleştir; üçgenler boşluk bırakmadan birbirine değsin. Bu noktada birleşen iç açıların toplamı 360◦ olacak şekilde kaç üçgen yerleştirmen gerektiğini belirle.
Yukarıda tanımlanan üçgenler birbirini örtmesin ve üçgenlerden hiçbirinin köşesi, diğer üçgenlerin kenarları üzerinde bulunmasın.

SORU 3

Düzlemde rastgele bir noktaya, düzenli altıgenleri birbirini örtmeyecek ve boşluk bırakmadan değecek biçimde kaç tane yerleştirebileceğini belirt. Yanıtını gerekçelendir. Varsayımını geometri yazılımı ile kontrol et.

Verilen bir alanın, bir 2B şekille kaplanması, bu biçimin özdeş kopyalarının alanı boşluksuz ve örtüşmesiz olarak tamamen kaplaması demektir. Doğada kaplama, arı kovanındaki petekte görülür. Bu, düzenli altıgenlerle yapılan bir kaplama örneğidir (şekil 1).



Şekil 1

Kaplama türleri:
- düzenli,
- yarı düzenli,
- düzensiz.

Düzenli kaplamada, bir noktada k adet düzenli n-gen bulunur. n-genlerin o noktada birleşen iç açıları toplamı bir tam açı olmalıdır; yani $k \cdot \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ$ buradan düzenleme ile şu denklem elde edilir: $\frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1$. Bu denklemin çözümleri doğal sayılar olmalıdır; ayrıca $k > 2$ ve $n > 2$.

ÖRNEK 2

Aşağıdaki tabloda, bir köşedeki iç açısı bir doğal sayı olan bazı düzenli n-genler verilmiştir. Bu tablodan yararlanarak, belirli bir alanın nasıl kaplanacağını belirt.

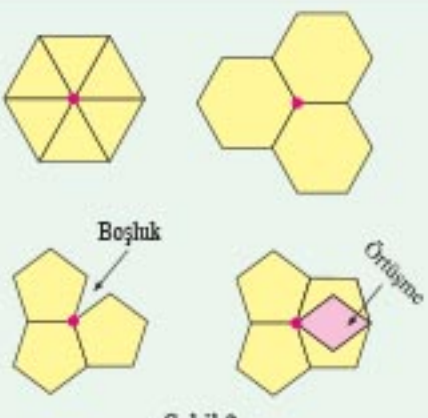
n	α	n	α	n	α
3	60°	8	135°	15	156°
4	90°	9	140°	18	160°
5	108°	10	144°	20	162°
6	120°	12	150°		

$n = 3$ için, $\frac{2}{k} = 1 - \frac{2}{3}$ yani $k=6$ olur; demek ki her noktada 6 eşkenar üçgen gereklidir.

$n = 5$ için, $k=3/5$ olur; bu da yalnızca düzenli beşgenlerle kaplamanın olanaksız olduğunu gösterir.

$n = 6$ için, $k = 3$ olur; bu da düzenli altıgenlerle kaplamanın, her noktada 3 altıgenin buluşmasıyla yapılabileceğini gösterir.

Tablodaki diğer nnn değerlerini, şekil 2'deki gibi kendin kontrol et.

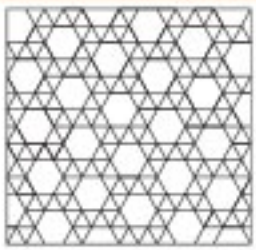
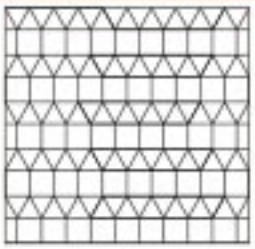
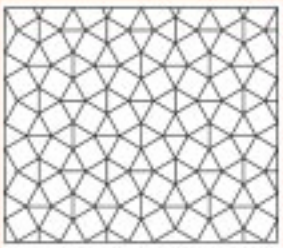
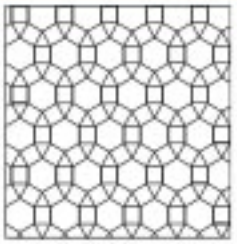


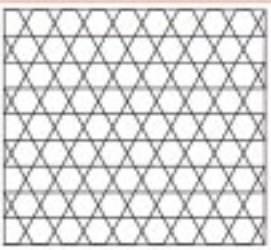
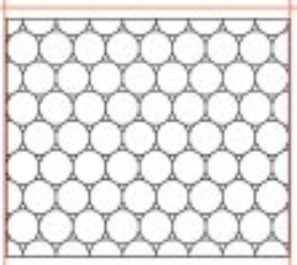
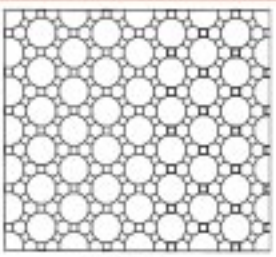
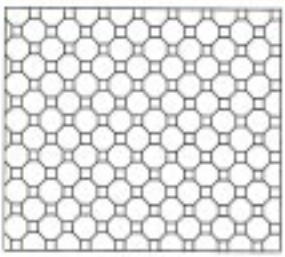
Şekil 2

ETKİNLİK

İki veya daha fazla düzenli çokgeni birleştirerek bir kaplama yapmayı dene.
Bir geometri yazılımı kullan.

Sekiz yarı düzenli kaplama vardır; bunlara **Arşimet kaplamaları** da denir. Bu kaplamalarda, düzlemin her noktasında iki veya daha fazla düzenli çokgen bulundurulur:

3.3.3.3.6	**3.3.3.4.4**	**3.3.4.3.4**	**3.4.6.4**
dört eşkenar üçgen ve bir düzgün altıgenden oluşan kaplamayı ifade eder.	üç eşkenar üçgen ve iki kareden oluşan kaplamayı ifade eder.	üç eşkenar üçgen ve iki kareden oluşan kaplamayı ifade eder.	bir eşkenar üçgen, iki kare ve bir düzgün altıgenden oluşan kaplamayı ifade eder
 3.3.3.3.6	 3.3.3.4.4	 3.3.4.3.4	 3.4.6.4

3.6.3.6	**3.12.12**	**4.6.12**	**4.8.8**
iki eşkenar üçgen ve iki düzgün altıgenden oluşan kaplamayı ifade eder.	bir eşkenar üçgen ve iki düzgün onikigenden oluşan kaplamayı ifade eder.	bir kare, bir düzgün altıgen ve bir düzgün onikigenden oluşan kaplamayı ifade eder.	bir kare ve iki düzgün sekizgenden oluşan kaplamayı ifade eder.
 3.6.3.6	 3.12.12	 4.6.12	 4.8.8

ÖRNEK 3

Eşkenar üçgenler ile karelerin birleşiminden bir kaplama elde edilemez; çünkü $k \cdot 60^\circ + n \cdot 90^\circ = 360^\circ$ yani $2k + 3n = 12$ denkleminin, n, k > 2 koşulu altında doğal sayılarda çözümü yoktur.

SORU 1

Yarı düzenli kaplamalarda hangi düzgün çokgenlerin kullanılabileceğini belirlemek için bir kural türet.

ETKİNLİK

Resim 2'dekine benzer kaplama örnekleri çevrende araştır ve bulmaya çalış.

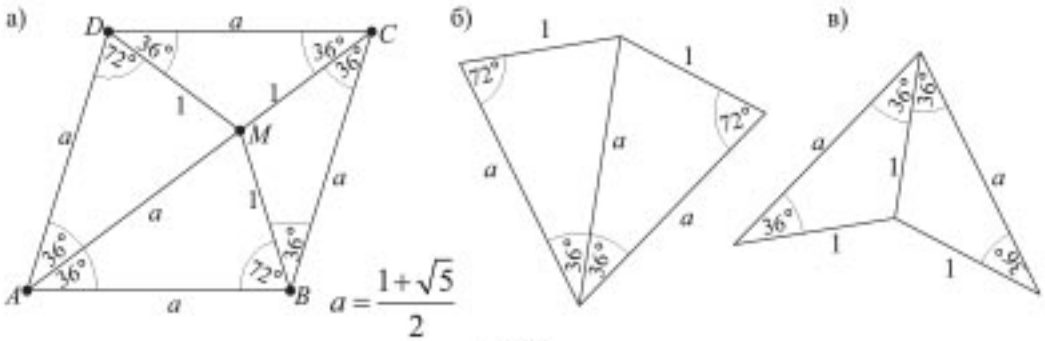


Resim 2

Kaplama, çokgen türü için hiçbir kısıtlama yoksa **düzensizdir**. Bilinen bir düzensiz kaplama, Penrose kaplamasıdır (şekil 3). Bu kaplama, kenarı $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olan ve dar açısı $\alpha = 72°$ olan ABCD rombunun, AC köşegeni üzerinde yer alan M noktasıyla iki parçaya ayrılmasıyla elde edilir ve $MC = 1$ koşulu sağlanır (şekil 4a). Birinci parça, üç iç açısı 72° olan ve "zırh/ejderha kanadı" olarak da adlandırılan bir deltoiddir (şekil 4b); ikinci parça ise "ok" olarak adlandırılır (şekil 4c).



Şekil 3



Şekil 4

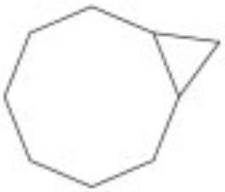
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kaplama yapılabilecek beşgenler var mı?
2. Dar açısı 75° olan ikizkenar bir yamukla bir kaplama yap.

3. Şekil 5'e, bir kaplama elde etmek için hangi düzgün çokgenleri ekleyebileceğini belirle.

4. Kenarları a olan eşkenar üçgenler ile kenarları a olan düzgün altıgenlerden oluşan düzensiz bir kaplamanın şemasını çiz; her ortak köşede iki üçgen ve iki altıgen buluşsun.

5. Kenarları a olan eşkenar üçgenler ile kenarları a olan karelerden oluşan düzensiz bir kaplamanın şemasını çiz; her ortak köşede üç üçgen ve iki kare buluşsun.



Şekil 5

ARAŞTIRMA

Escher kaplamalarını (resim 3) araştır ve kendi kaplamanı oluştur.



Resim 3

4.16. Benzer Üçgenler

ETKİNLİK

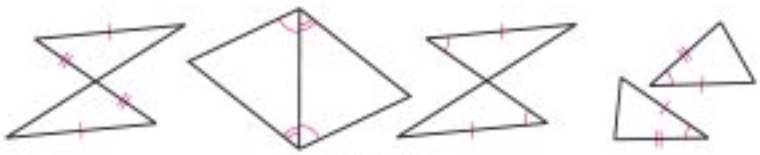
Şekil 1'deki her çizimde verilenlere göre hangi üçgenlerin eş olduğunu ve hangi ölçütlere göre eş olduklarını yaz.



Şekil 1

ETKİNLİK

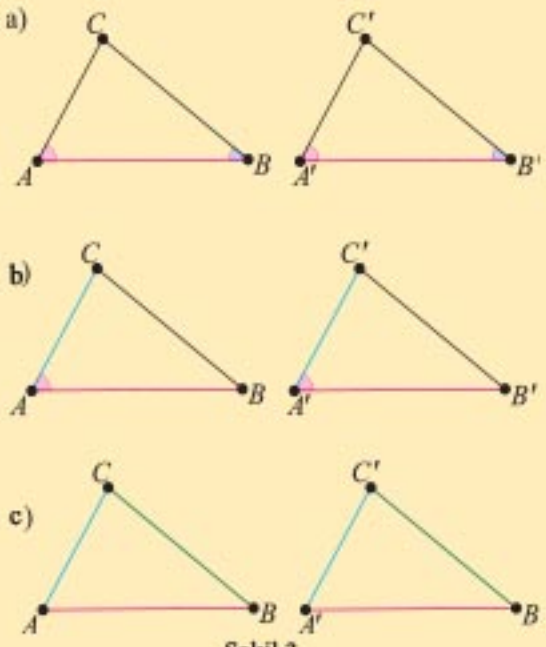
Şekil 2'deki her çizimde üçgenlerin eş olup olmadığını belirle. Yanıtın evet ise, hangi ölçüte göre olduğunu belirt.



Şekil 2

İki üçgenin eşliği için ölçütler:

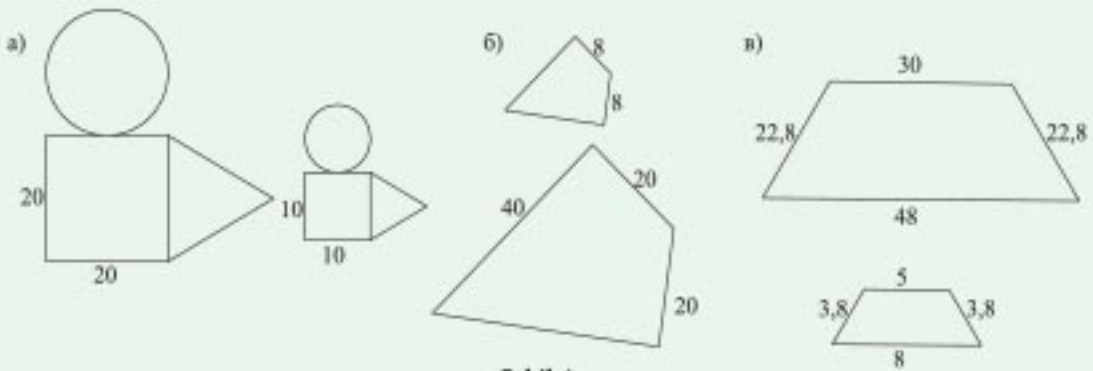
- (ACA): Bir üçgende bir kenar ve bu kenar üzerinde bulunan iki açı, diğer üçgendeki karşılık gelen kenar ve aynı kenar üzerindeki iki açı ile eşittir (şekil 3a).
- (CAC): Bir üçgende iki kenar ve aralarındaki açı, diğer üçgendeki karşılık gelen iki kenar ve aradaki açı ile eşittir (şekil 3b).
- (CCC): Bir üçgendeki üç kenarın uzunlukları, diğer üçgendeki karşılık gelen üç kenarın uzunluklarına eşittir (şekil 3c).



Şekil 3

ÖRNEK 1

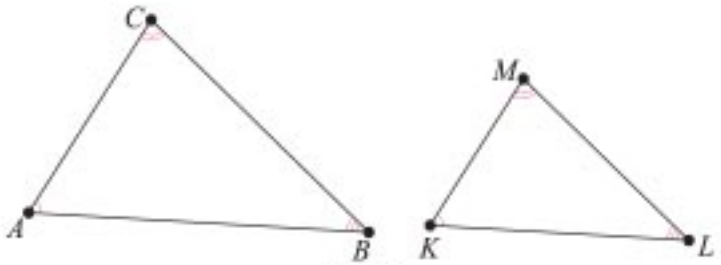
Şekil 4a, 4b ve 4c'deki şekiller benzerdir. Yalnızca büyüklükleri farklıdır. Birinin diğerine göre ölçek çarpanını tahmin et.



Şekil 4

İki üçgende karşılık gelen açılar eş ve karşılık gelen kenarlar orantılı ise, bu üçgenlere denir.

Şekil 5'te ABC ve KLM üçgenleri benzerdir. $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ yazılır. Bu, karşılık gelen açıların eş ve karşılık gelen kenarların orantılı olduğunu, yani $\frac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{KM}} = k$ anlamına gelir. k sayısına benzerlik katsayısı denir.



Şekil 5

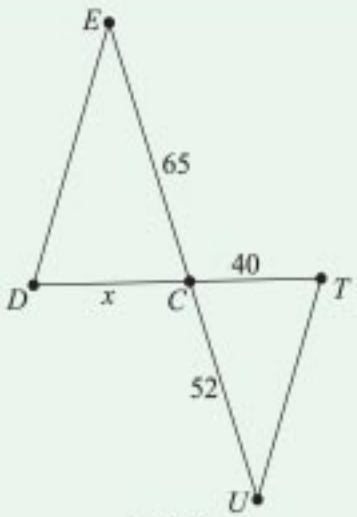
ÖRNEK 2

Şekil 6'daki üçgenler benzerdir. Bilinmeyen kenarın uzunluğunu bul.

$\Delta CUT \sim \Delta CED$ olduğundan

$\frac{\overline{CT}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CU}}{\overline{CE}} = k$, yani

$\frac{40}{x} = \frac{52}{65} \Rightarrow x = 50.$



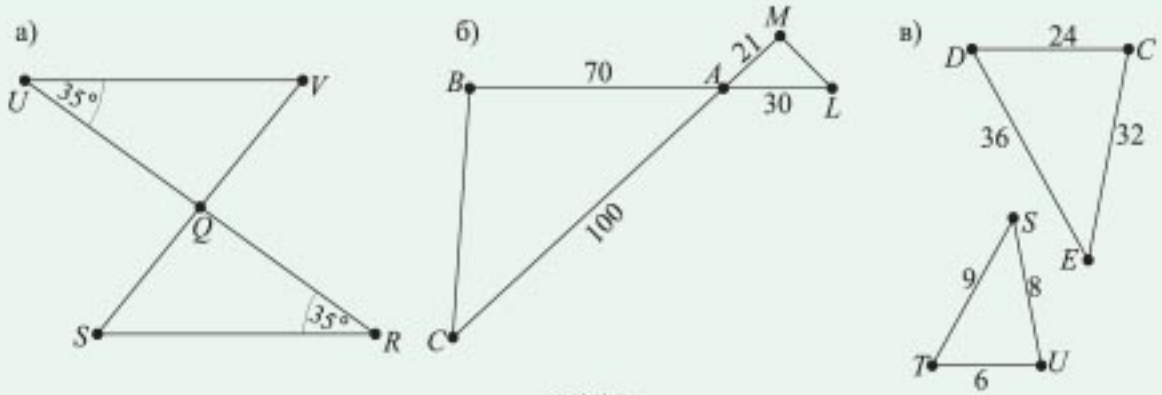
Şekil 6

Benzerlik ölçütleri

- (**AA**): Bir üçgendeki iki açı, diğer üçgendeki iki açıya eşitse üçgenler benzerdir.
- (**CAC**): Bir üçgendeki bir açı, diğer üçgendeki bir açıya eşit ve bu açıları oluşturan kenarlar orantılı ise üçgenler benzerdir.
- (**CCC**): İki üçgenin tüm karşılık gelen kenarları orantılı ise üçgenler benzerdir.

ÖRNEK 3

Şekil 7'deki a), b) ve c) şıklarında üçgenlerin neden benzer olduğunu açıkla.



Şekil 7

a) $\measuredangle QRS = \measuredangle QUV = 35°$ ve $\measuredangle SQR = \measuredangle VQU$ tepe açılardır. Bu nedenle (AA) ölçütüne göre $\Delta VQU \sim \Delta SQR$.

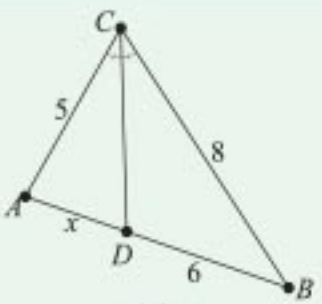
b) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{21}{70} = \frac{30}{100} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}}$ ve $\measuredangle BAC = \measuredangle LAM$ tepe açıdır. Bu nedenle (SAS) ölçütüne göre $\Delta BAC \sim \Delta MAL$

c) $\frac{6}{24} = \frac{8}{32} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ t.e. $\frac{\overline{TU}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{US}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{DE}} = \frac{1}{4}$. Bu nedenle (SSS) ölçütüne göre $\Delta TUS \sim \Delta DCE$.

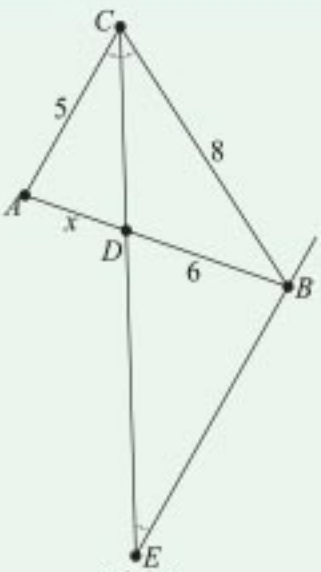
ÖRNEK 4

Şekil 8'de CD, C tepesindeki açının açıortayıdır. Bilinmeyen AD uzunluğunu belirle.

Önce B noktasından AC'ye paralel bir doğru çiz ve bu doğrunun CD ile kesişimine E adını ver (Şekil 9). $AC \parallel BE$ olduğundan $\measuredangle BEC = \measuredangle DCA$ (iç ters açılar). Ayrıca CD, $\measuredangle ACB$'nin açıortayı olduğundan $\measuredangle BEC = \measuredangle DCB$. Buna göre ΔCEB ikizkenardır ve BE = BC = 8 olur. Öte yandan $\measuredangle ADC = \measuredangle BDE$ tepe açıdır. ΔADC ile ΔBDE (AA) ölçütüne göre benzerdir; dolayısıyla $\frac{5}{8} = \frac{x}{6}$, buradan $x = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$.

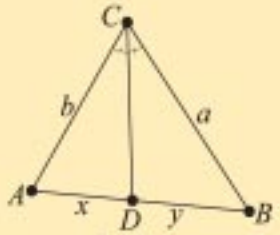


Şekil 8



Şekil 9

Her iç açının açıortayı, üçgenin karşı kenarını, o açıyı oluşturan kenarların oranında iki parçaya böler; yani $\frac{b}{a} = \frac{x}{y}$ (Şekil 10).



Şekil 10

SORU 1

İki dik üçgen için bir benzerlik ölçütü yaz.

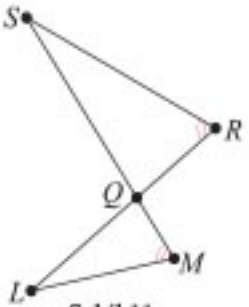
SORU 2

İki ikizkenar üçgen için bir benzerlik ölçütü yaz.

ALIŞTIRMA SORULARI

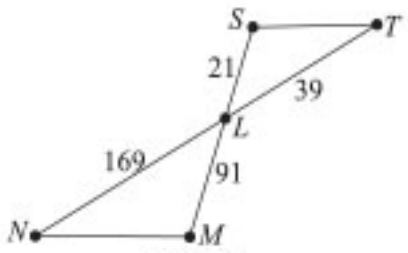
1. Şekil 11, 12 ve 13'teki verilere göre cümleyi defterine geçir ve tamamla:

a)



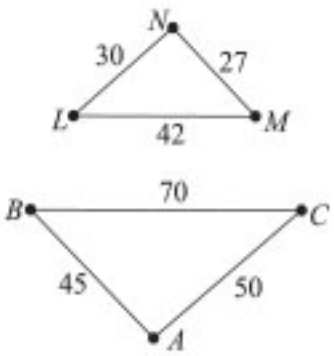
Şekil 11

b)



Şekil 12

c)



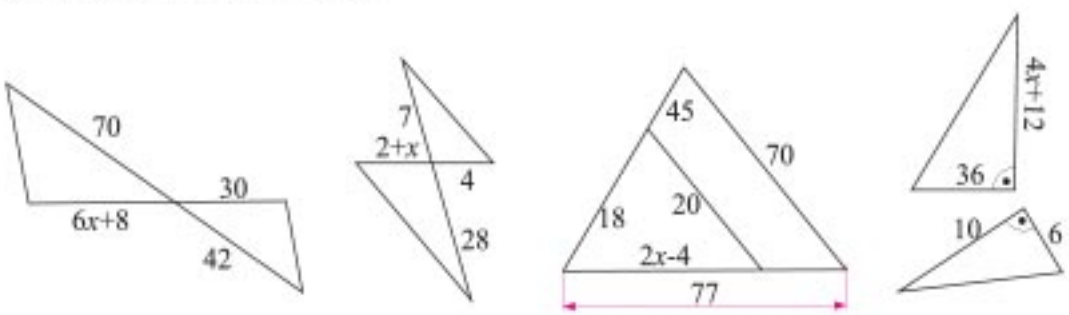
Şekil 13

$\Delta QRS \sim \Delta$____, ölçüte göre ____.

$\Delta LMN \sim \Delta$____, ölçüte göre ____.

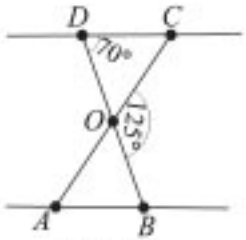
$\Delta ABC \sim \Delta$____, ölçüte göre ____.

2. Şekil 14'teki çizimlerde, üçgenlerin benzer olduğu biliniyorsa, verilenlere göre bilinmeyen büyüklüğün uzunluğunu belirle.



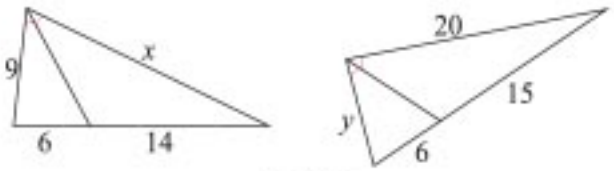
Şekil 14

3. Şekil 15'e göre, AB ve CD doğruları paralelse $\measuredangle COD$, $\measuredangle OCD$ ve $\measuredangle BAO$'yu belirle.



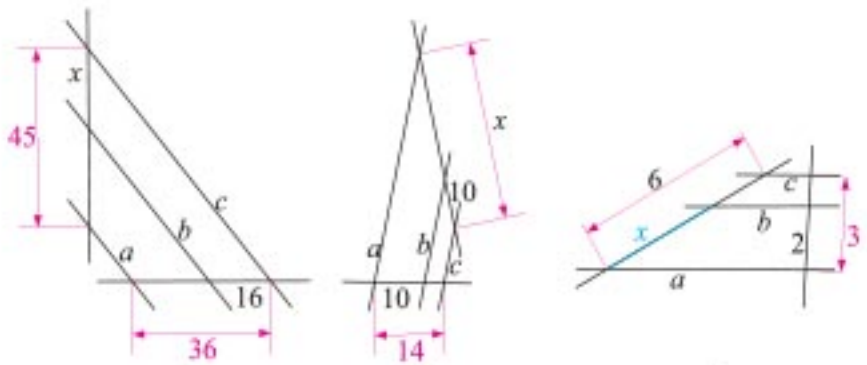
Şekil 15

4. Şekil 16'daki verilere göre x ve y kenar uzunluklarını belirle.



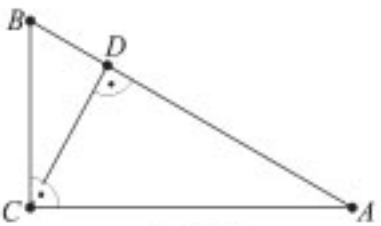
Şekil 16

5. Şekil 17 a), b) ve c)'de, a, b, c doğruları paralel ise, her birinde bilinmeyen x uzunluğunu belirle.



a) b) c)
Şekil 17

6. Şekil 18'de hangi üçgenlerin benzer olduğunu belirt. ΔABC, C tepesinde dik açılıdır ve CD, hipotenüs AB'ye çizilen yüksekliktir.



Şekil 18

7. $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ ve $\overline{EG} = \overline{FG} = 3$, $\measuredangle BAC = \measuredangle FEG = 40°$ olan iki ikizkenar üçgen ABC ve EFG verilsin. $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ midir? Cevabını açıkla!

4.17. Benzerliğin Uygulanması

ÖRNEK 1

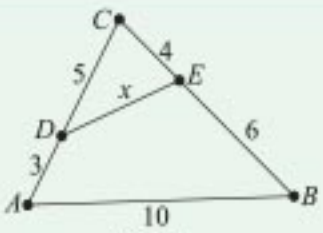
Şekil 1'de verilenlere göre x kenarının uzunluğunu belirle.

x, ΔCDE'nin bir kenarıdır; bu nedenle, bu üçgenin kenarlarının ΔCBA'nın kenarlarıyla aynı benzerlik katsayısını verip vermediğini denetlemek gerekir.

$\frac{4}{5+3} = \frac{5}{4+6} = \frac{1}{2}$ ve

C tepesindeki açı ortak; bu yüzden (SAS) ölçütüne göre $\Delta CDE \sim \Delta CBA$.

Buna göre $\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$ buradan $x = 5$ bulunur.



Şekil 1

ÖRNEK 2

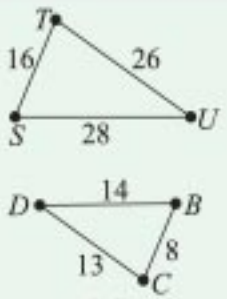
Şekil 2'de ΔSUT ve ΔBDC üçgenlerinin çevrelerini hesapla. Benzerlik katsayısını belirle ve çevrelerin oranı ile karşılaştır.

Benzerlik katsayısı

$\frac{\overline{SU}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{UT}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{CB}} = 2 = k$ olur. Çevreler ise

$L_{\Delta SUT} = 28 + 26 + 16 = 70$ ve $L_{\Delta BDC} = 14 + 13 + 8 =$

da $\frac{L_{\Delta SUT}}{L_{\Delta BDC}} = \frac{70}{35} = 2 = k$ elde edilir.



Şekil 2

İki benzer üçgenin çevreleri oranı, benzerlik katsayısına eşittir.

ÖRNEK 3

Şekil 3'te ΔBAC ve ΔSAT üçgenlerinin alanlarını hesapla; sonra benzerlik katsayısını belirle ve alanların oranı ile karşılaştır.

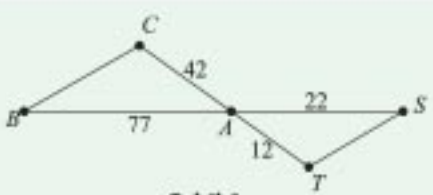
Benzerlik katsayısı

$\frac{\overline{BA}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{TS}} = \frac{7}{2} = k$ şeklindedir. Alanlar ise

$P_{\Delta BAC} = \frac{77 \cdot 42 \sin \measuredangle BAC}{2}$ ve $P_{\Delta SAT} = \frac{22 \cdot 12 \sin \measuredangle SAT}{2}$

olur ve buradan $\measuredangle BAC = \sin \measuredangle SAT$ (iç ters açılar) olduğundan

$\sin \measuredangle BAC = \sin \measuredangle SAT$ sağlanır. Bu yüzden $\frac{P_{\Delta BAC}}{P_{\Delta SAT}} = \frac{77}{22} \cdot \frac{42}{12} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = k^2$ sonucu elde edilir.

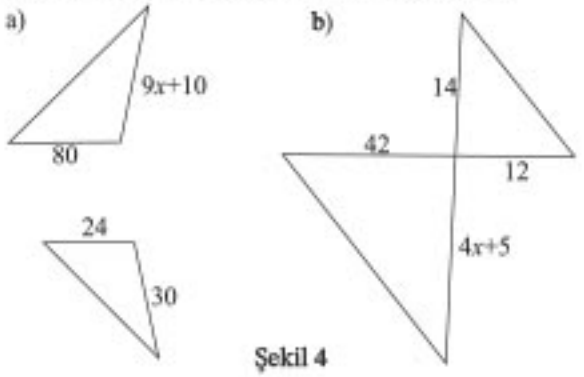


Şekil 3

İki benzer üçgenin alanlarının oranı, üçgenlerin benzerlik katsayısının karesine eşittir.

SORU 1

Şekil 4 a) ve b)'de üçgenler benzer ise, verilenlere göre x değerini bul.



Şekil 4

Nesneler Arasındaki Benzerliği, Bir Geometrik Eğitim Yazılımı İle Gösterme Modelleri

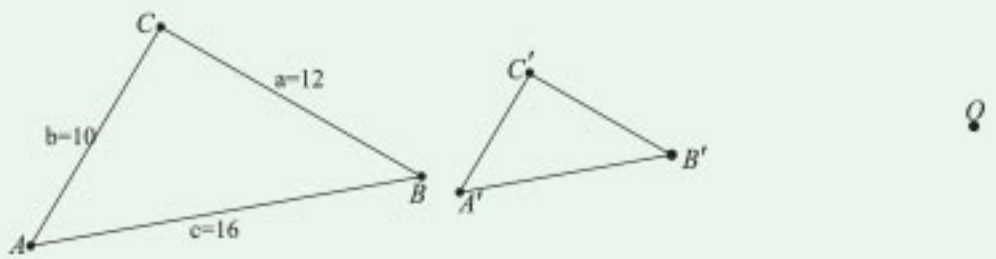
ÖRNEK 4

Bir geometrik eğitim yazılımı seç. Kenarları 10, 16 ve 12 olan ABC üçgenini çiz. (Şekil 1). Sonra üçgeni yarıya indir; azaltma düğmesini (homoteti ya da dilatasyon) kullan.

Yeni üçgen A′B′C′′nin kenar uzunluklarını ölç. ABC'nin köşelerini hareket ettir ve A′B′C′′nin köşelerinin nasıl değiştiğini gözlemle.

Şekil 1'e benzer bir görünüm elde etmen gerekir. O noktası homoteti, yani dilatasyon merkezidir.





Şekil 1

SORU 2

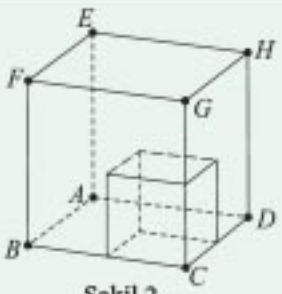
Keyfi kenarlara sahip bir üçgen çiz ve onun ağırlık doğrularını, yüksekliklerini, kenar orta dikmelerini ve açıortaylarını çiz. Homoteti düğmesini kullanarak benzerlik katsayısını $k = \frac{1}{3}$ seç ve verilen üçgene benzer yeni bir üçgen çiz. Daha sonra aynı benzerlik katsayısı ile bu yeni üçgenin de ağırlık doğrularını, yüksekliklerini, kenar orta dikmelerini ve açıortaylarını çiz. Uzunluk ve açı ölçüm araçlarıyla iki üçgendeki boyutları karşılaştır. Elde ettiğin sonuçları yaz.

Benzer üçgenlerde benzerlik katsayısı, karşılık gelen kenar uzunlukları, yükseklikler, ağırlık doğruları (medyanlar), kenar orta dikmeleri ve açıortaylar için aynıdır.

ÖRNEK 5

Küp ABCDEFGH'yi çiz. Homoteti düğmesini seç ve verilen küpten iki kat küçük bir küp çiz. Homotetinin merkezi olarak ABCDEFGH küpünün C tepe noktasını seç.

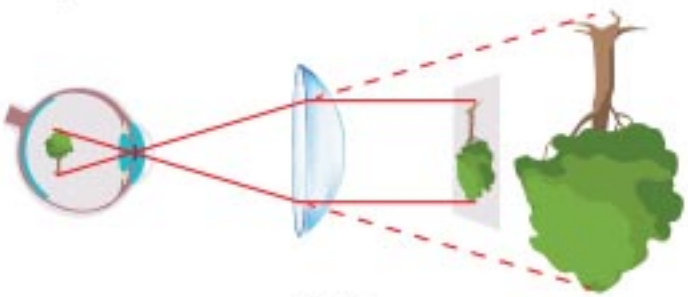
Şekil 2'ye benzer bir görünüm elde etmelisin.
Homoteti merkezi C tepe noktasıdır.



Şekil 2

SORU 3

Büyütecin (şekil 1) nasıl kullanıldığını araştır. Araştırmanı, orijinal nesneyi ve büyütülmüş nesneyi göstereceğin bir geometrik yazılım ile destekle.


Şekil 1

ÖRNEK 6

Özel bir ölçüm aracı olmadan, uzunluğu yaklaşık bir metre olan bir çubuk ve güneş ışığından yararlanarak bir ağacın yüksekliğini nasıl belirleyebileceğini biliyor musun?

Önce çubuğu yere sapla ve gölgesini ölç (şekil 2). Sonra ağacın gölgesini de ölç. Çubuk, onun gölgesi ve çubuğun ucuna düşen güneş ışınıyla gölgenin ucunu birleştiren doğru, bir dik üçgen oluşturur. Benzer biçimde, ağaç, onun gölgesi ve ağacın tepesine düşen güneş ışınıyla gölgenin ucunu birleştiren doğru da bir dik üçgen oluşturur. Güneş ışını aynı anda ve çok uzak bir kaynaktan aynı açıyla her iki nesneye de düştüğünden, ışınları paralel kabul edebiliriz; bu da iki üçgenin benzer olduğu anlamına gelir. Benzerlik katsayısını kullanarak ağacın yüksekliğini bulursun.



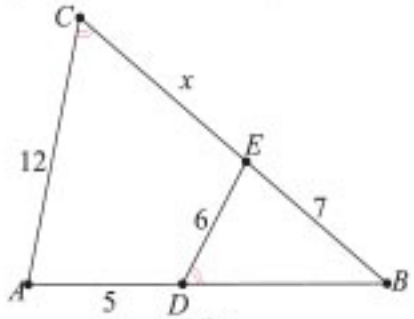
Şekil 2

SORU 4

Güneşli bir günde, uzunluğu 1,2 metre olan bir çubuk yardımıyla ağacın yüksekliğini ölç. Bir geometrik eğitim yazılımı kullanarak, keyfi bir benzerlik katsayısıyla çubuk ve ağaç için bir model oluştur.

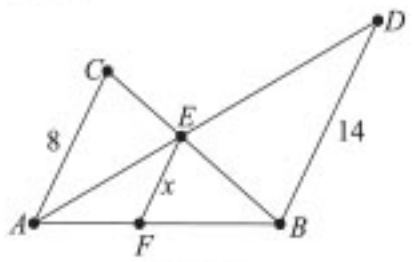
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Şekil 3'te verilenlere göre, bilinmeyen kenarın uzunluğunu belirle.



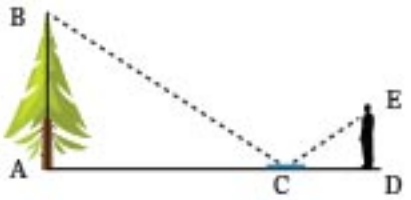
Şekil 3

2. Şekil 4'te verilenlere göre, AC, BD ve EF doğruları paralelse, bilinmeyen kenarın uzunluğunu belirle.

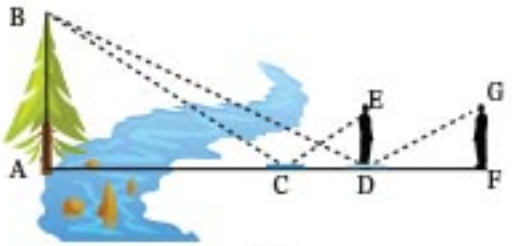


Şekil 4

3. Bir nesnenin yüksekliğini, yere yerleştireceğin bir ayna yardımıyla ölçebilirsin. Aynayı nasıl kullanacağına düşün ve benzer üçgenleri nasıl elde edeceğini açıkla (şekil 3). Seninle ağaç arasında bir engel, örneğin bir nehir varsa nasıl hareket edeceğini belirt (şekil 4). Görevin gereklerine uygun olarak, bir geometrik eğitim yazılımında model oluştur.

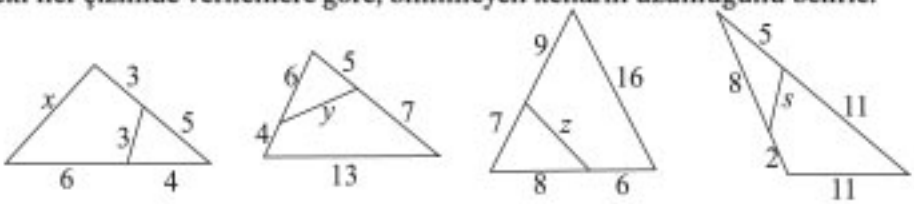


Şekil 3



Şekil 4

4. Şekil 5'teki her çizimde verilenlere göre, bilinmeyen kenarın uzunluğunu belirle.



Şekil 5

5. Bir binanın avlusunda yüksekliği 1,5 metre olan bir ağaç vardır. Ağacın gölgesi 4 metre, binanın gölgesi 7 metre ise, binanın yüksekliğini ölç.

ARAŞTIRMA

Binaların, uçakların, köprülerin modellerinin, gerçek yapılar inşa edilmeden önce dayanıklılıklarının denetlenmesinde nasıl kullanıldığını araştır (şekil 5 ve şekil 6).



Resim 5



Resim 6

TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR

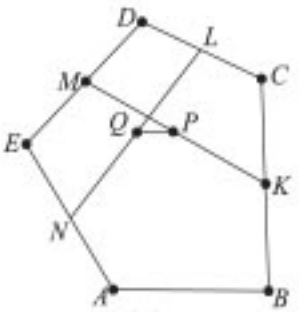
1. Düzgün altıgen $ABCDEF$ verilmişse ve $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ ve $\overrightarrow{BE}$ vektörlerini $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ cinsinden ifade et.

2. $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$ ifadesini sadeleştir.

3. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$ ifadesini sadeleştir.

4. $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{LM} - \overrightarrow{EL} + \vec{x} = \overrightarrow{MK}$ eşitliğinden $\vec{x}$ vektörünü belirle.

5. ABCDE beşgeninde K, L, M ve N sırasıyla BC, CD, DE ve EA kenarlarının orta noktaları, P ve Q ise sırasıyla KM ve LN parçalarının orta noktaları olsun (Şekil 1). PQ ve AB parçalarının paralel olduğunu kanıtlayınız ve uzunluklarının oranını belirle.



Şekil 1

6. Bir yamukta tabanların orta noktaları ile köşegenlerin kesişim noktası aynı doğru üzerinde bulunur. Bunu ıspatla.

7. ABCD paralelkenarında E, AB kenarının orta noktası; M, AC ile DE'nin kesişim noktası olsun. $\overline{AM} : \overline{MC} = 1 : 2$ ve $\overline{DM} : \overline{ME} = 2 : 1$ olduğunu ıspatla.

8. A, B ve C üç farklı nokta ise, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ olabilir mi?

9. ΔABC'nin kenarları a = 6 cm, b = 12 cm ve c = 10,5 cm olsun. $b_1 = 8$ cm olmak üzere, ΔABC'ye benzer $\Delta A_1B_1C_1$ üçgeninin kenarlarını hesapla.

10. Bir üçgenin kenarları $a : b : c = 3 : 7 : 8$ oranındadır. Buna benzer bir üçgende en uzun kenar 10 cm'dir. İkinci üçgenin öteki iki kenarını belirle.

11. Aşağıdaki ifadelerin değerini hesapla:

a) $\dfrac{\sin 30^\circ - \cos 30^\circ}{5 \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}$ b) $\dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2\cos^2 30^\circ - 1}$ c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{1 - \cos\alpha}$

12. Aşağıdaki koşulları sağlayan keskin açı α'yı bul:

a) $\sin\alpha = \cos 65^\circ$ b) $\cos\alpha = \sin 42^\circ 50''$

c) $\sin(\alpha + 20^\circ) = \sin 50^\circ$ d) $\operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha + 25^\circ)$.

13. Değerleri karşılaştır:

a) sin 72° ve sin 27° b) cos 31°20′ ve cos 30°40′

c) tg 49° ve tg 29° d) ctg 49°30′ ve ctg 49°55′

14. Aşağıdaki değerler verildiğinde kalan trigonometrik oranları hesapla:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{25}$

15. Aşağıdaki ifadelerin değerini hesapla:

a) $4\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha$, eğer $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, eğer $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

16. Aşağıdaki veriler için dik üçgen ABC'yi çöz:
    a) $\alpha = 36°2', c = 68$ b) $\beta = 64°20', a = 450$
    c) $\beta = 85°10', b = 0{,}62$ d) $a = 230, c = 320$ e) $b = 3{,}9, c = 42{,}5$.

17. Dik üçgendeki keskin açılar için $\alpha > \beta$ ve $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$, $\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olsun. Bu açıların büyüklüklerini belirle.

18. İkizkenar bir yamukta, taban a, yan kenar c ve taban açısı α bilinsin. Öteki tabanı ve yüksekliği hesapla.

19. Üçgen ABC'de tepe C'deki açı 40°'dir. C tepesindeki dış ve iç açıların açıortayları AB doğrusunu D ve E noktalarında kesiyor ve CDE ikizkenar üçgenini oluşturuyor. Üçgen ABC'nin açılarını belirle.

20. Hipotenüse çizilen yükseklik ile dik açının açıortayı 10°'lik bir açı yapmaktadır. Üçgendeki keskin açıları belirle.

21. α ve β açıları yardımıyla, α açısının açıortayının karşı kenarla oluşturduğu φ açısını ifade et.

22. İki iç açı α ve β'nın açıortayları, üçgendeki üçüncü açıya eşit olan γ açısı ile kesişiyorsa, bu γ açısını belirle.

23. Bir üçgendeki bir açının açıortayı ile karşı kenara çizilen yüksekliğin oluşturduğu açı, üçgendeki öteki iki açının yarım farkına eşittir. Bunu ıspatla.

24. Üçgen ABC'de, CD yüksekliği ile CE ağırlık doğrusu, ACB açısını üç eş parçaya ayırmaktadır. Üçgen ACB'nin açılarını belirle.

25. İkizkenar bir üçgenin tabanına dik olan ve bir kenarı ile öteki kenarın uzantısını kesen doğru, tepe üzerinden yeniden bir ikizkenar üçgen oluşturur. Bunu ıspatla.

26. İkizkenar bir üçgende bir kenara indirilen yükseklik, tabanla tepe açısının yarısına eşit bir açı yapar. Bunu ıspatla.

27. ΔABC'de AA' ve BB' yüksekliklerinin AB kenarı ile oluşturduğu açıların toplamı, tepe C'deki açıya eşittir. Bunu ıspatla.

28. Dik üçgen ABC'nin hipotenüsü BC üzerinde D ve E noktaları verilsin; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ ve $\overline{CD} = \overline{AC}$ olsun. DAE açısını belirle.

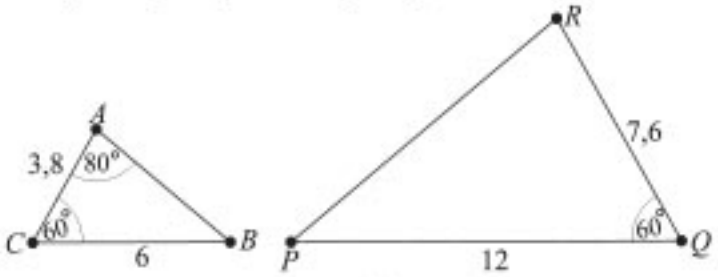
29. Üçgen ABC'de CH yüksekliğinin uzunluğu, AB kenarının yarısına eşittir. İç açı BAC, 75°'dir. ABC açısını belirle.

30. CD, dik üçgen ABC'de bir yükseklik olsun. R ve S, sırasıyla ACD ve BCD üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri olsun. CR ve CS doğruları AB'yi sırasıyla P ve Q noktalarında kesiyorsa, $\overline{AC} = \overline{AQ}$ ve $\overline{BC} = \overline{BP}$ olur. Bunu ıspatla.

31. 30 sorudaki kurallar doğrultusunda, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezinin, CPQ üçgeninin dıştan çizilen çemberinin de merkezi olduğunu kanıtlayın.

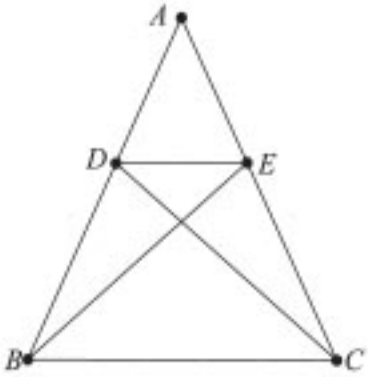
32. ΔPQR'de E ve F noktaları sırasıyla PQ ve PR kenarları üzerinde olsun. Aşağıdaki verilere göre $EF \parallel QR$ olup olmadığını belirle:
    a) $\overline{PE} = 3{,}9$ cm, $\overline{EQ} = 3$ cm, $\overline{PF} = 3{,}6$ cm ve $\overline{FR} = 2{,}4$ cm,
    b) $\overline{PE} = 4$ cm, $\overline{EQ} = 4{,}5$ cm, $\overline{PF} = 8$ cm ve $\overline{FR} = 9$ cm,
    c) $\overline{PE} = 1{,}28$ cm, $\overline{EQ} = 2{,}56$ cm, $\overline{PF} = 0{,}18$ cm ve $\overline{FR} = 0{,}36$ cm.

33. Şekil 2'de verilenlere göre $\measuredangle QPR$ açısının büyüklüğünü belirleyiniz.

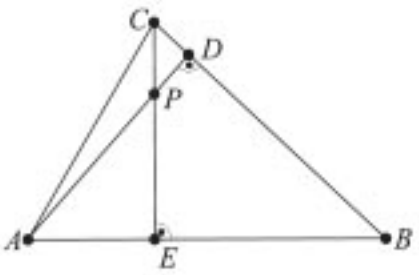


Şekil 2

34. ΔABE ≅ ΔACD ise, ΔADE ~ ΔABC olur (Şekil 3). Bunu ıspatla.



Şekil 3

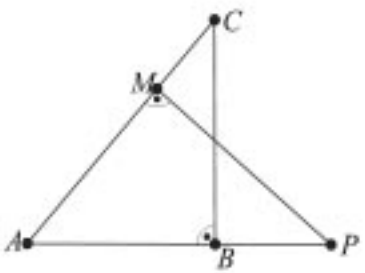


Şekil 4

35. AD ve CE yükseklikleri P noktasında kesişmektedir (Şekil 4). Aşağıdakileri ıspatla:
    a) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$ b) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$ c) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$ d) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

36. E noktası, ABCD paralelkenarının AD kenarının uzantısı üzerinde olsun. BE doğru parçası, CD kenarını F noktasında kessin. ΔABE ~ ΔCFB olduğunu ıspatla.

37. ABC ve AMP üçgenleri, sırasıyla B ve M tepe noktalarında dik açılıdır (Şekil 5).
    Aşağıdakileri ıspatla:
    a) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ b) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MP}}$



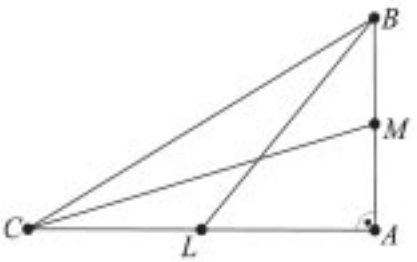
Şekil 5

38. Yüksekliği 6 metre olan düşey bir direğin gölgesi 4 metredir. Aynı anda bir kulenin gölgesi 28 metredir. Kule ne kadar yüksektir?

39. ΔABC ve ΔDEF benzerdir ve alanları sırasıyla 64 ve 121 santimetrekaredir. $\overline{EF} = 15{,}4$ cm ise, BC kenarının uzunluğunu belirleyiniz.

40. ABCD yamacında $(AB||CD)$ AC ve BD köşegenleri O noktasında kesişmektedir. $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ ise, $\frac{P_{\Delta ABO}}{P_{\Delta CDO}}$ oranı kaçtır?

41. CM ve BL, dik üçgen BCA'da (dik açı A'da) ağırlık doğruları olsun (Şekil 6).
$4(\overline{BL}^2 + \overline{CM}^2) = 5\overline{BC}^2$ olduğunu ıspatla.



Şekil 6

Konu 5:

ÖLÇME

Bu konuyu işlerken şu becerilere sahip olacaksın:

1. 2B şekillerin çevre ve alanını kullanarak gerçek bağlamdaki problemleri çözebileceksin;
2. 3B şekillerin yüzey alanı ve hacmiyle ilgili gerçek problemleri çözebilecek ve uygun ölçü birimlerini kullanabileceksin.

5.1. 2B-Şekillerin Çevresi ve Alanı

SORU 1

Bir yaya geçidindeki beyaz şeritler 3 m uzunluğunda, 50 cm genişliğinde dikdörtgenlerdir ve iki bitişik şerit arasındaki mesafe 50 cm'dir. Yol 6 m genişliğindeyse ve uç şeritler kaldırımdan 2,5 dm uzaklıktaysa, beyaza boyanması gereken toplam yüzey alanı ne kadardır?



Şekil 1

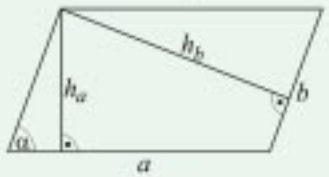
SORU 2

Çevreyi ve alanı hesapla:
a) köşegeni d = 15 cm olan bir kare,
b) bir kenarı a = 7 cm ve köşegeni d = 25 cm olan bir dikdörtgen.

ÖRNEK 1

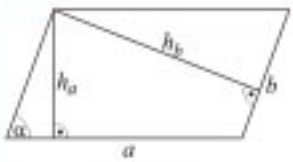
a = 10 cm, b = 12 cm ve dar açı $\alpha = 30°$ olan bir paralelkenarın çevresini ve alanını hesapla (şekil 1).

Paralelkenarın çevresi $L = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b) = 2(10 + 12) = 2 \cdot 22 = 44$ cm, alanı ise
$P = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 10 \cdot 12 \cdot 0{,}5 = 60$ cm²'dir.



Şekil 1

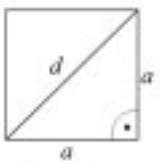
paralelkenarlar



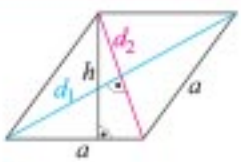
$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$
$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$



$P = a \cdot b$

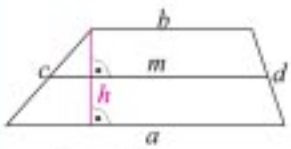


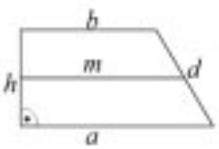
$P = a^2$
$P = \frac{d^2}{2}$

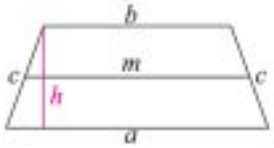


$P = a \cdot h$
$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

yamuklar

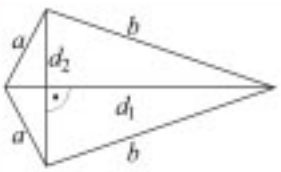


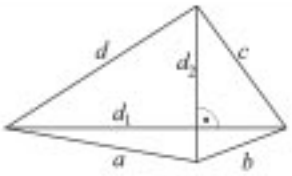




$P = \frac{(a+b)h}{2}$, $P = mh$

yamuklar





deltoid ve köşegenleri birbirine dik olan dörtgen $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

SORU 3

Alanı 756 cm² olan bir dikdörtgenin, kenarları 3:7 oranında ise çevresini hesaplayınız.

SORU 4

Bir dikdörtgenin bir kenarı 1 dm, diğer kenarı ise köşegeninden 2 cm daha küçüktür. Bu dikdörtgenin çevresini ve alanını hesapla.

SORU 5

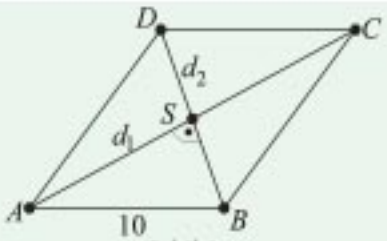
Bir dikdörtgende köşegenlerin kesişim noktası, küçük kenara göre büyük kenara 4 cm daha yakındır. Dikdörtgenin çevresi 56 cm ise alanını hesapla.

ÖRNEK 2

Kenar uzunluğu 1 dm ve bir köşegeni 12 cm olan bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplayın.

$d_2 = 12$ cm olsun. Dik üçgen ABS'den (şekil 2) $\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 10^2$ elde edilir;

buradan $d_1 = 16$ cm. Alan $P = \frac{d_1 d_2}{2} = 96$ cm²'dir.



Şekil 2

SORU 6

Bir eşkenar dörtgenin yüksekliği 48 cm, büyük köşegeni 8 dm'dir. Eşkenar dörtgenin çevresini hesapla.

ÖRNEK 3

Köşegenleri birbirine dik olan, $d_1 = 12$ cm ve $d_2 = 7$ cm olan bir dörtgenin alanı

$P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$ cm²'dir.

ÖRNEK 4

İkizkenar bir yamuk, tabanları a = 15 cm, b = 11 cm ve yan kenarı c = 5 cm olarak verilmiştir. Yamuk yüksekliğini ve alanını belirle.

Şekil 3'ten $15 = 2x + 11$ elde ederiz, o hâlde $x = 2$.
Şimdi, Pisagor teoreminden
$h = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$, ile $P = \frac{(15+11)\sqrt{21}}{2} = 13\sqrt{21}$ cm².



Şekil 3

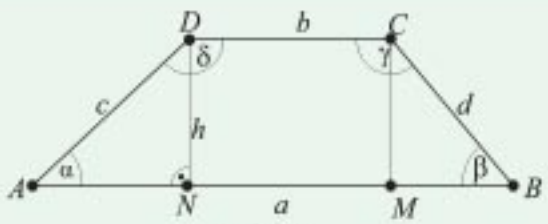
ÖRNEK 5

Tabanları a = 35 cm, b = 14 cm ve kenarları c = 13 cm, d = 20 cm olan bir yamuk verilmiştir. Yüksekliğini ve alanını belirle.

Şekil 4'ten $\overline{AN} + \overline{MB} = 35 - 14 = 21$ cm elde edilir.
$\overline{AN} = x$ alırsak, $\overline{MB} = 21 - x$ olur ve Pisagor teoreminden ΔAND ve ΔMBC için sırasıyla $h^2 = 13^2 - x^2$ ve $h^2 = 20^2 - (21-x)^2$ bulunur.
Buna göre

$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$$
$$169 - x^2 = 400 - 441 + 42x - x^2$$
$$42x = 210$$
$$x = 5$$

Demek ki $h^2 = 13^2 - 5^2$ t.e. $h = 12$ cm.
Yamuğun alanı için
$P = \frac{(35+14)}{2} \cdot 12 = 294$ cm².

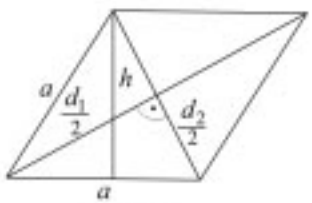


Şekil 4

ÖRNEK 6

Köşegenleri d1 = 16 cm ve d2 = 12 cm olan bir eşkenar dörtgenin

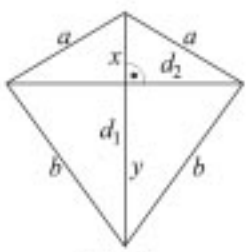
$P = \frac{d_1 d_2}{2} = 96$ cm², $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 10$ cm,
ve $h = \frac{P}{a} = 9{,}6$ cm'dir (Şekil 5).



Şekil 5

ÖRNEK 7

Kenarları a = 4 dm, b = 5 dm ve d2 = 7 dm
olan bir deltoid (Şekil 6) (d_2 deltoidin simetri ekseni değildir)
için $d_1 = x + y = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} + \sqrt{5^2 - 3{,}5^2} \approx 5{,}51$ dm
burada x ve y, ikizkenar üçgenlerin belirlediği köşegen parçalarıdır.
Alanı $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \approx 19{,}29$ dm² ve $L = 2(a+b) = 18$ dm'dir.

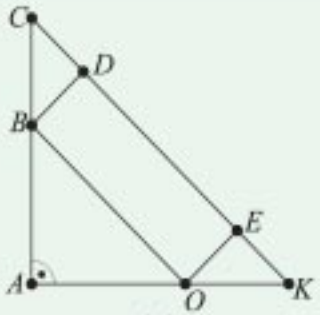


Şekil 6

ÖRNEK 8

İkizkenar dik bir üçgen verilidir. Bu üçgenin içine, uzun kenarı hipotenüs üzerinde yatan ve diğer iki köşesi dik kenarlar üzerinde bulunan bir dikdörtgen, Şekil 7'deki gibi, çizilmiştir.
Dikdörtgenin kenarları 5 : 2 oranında ve hipotenüs 63 cm ise, dikdörtgenin alanını hesapla.

C ve K noktalarındaki açılar 45°'dir; dolayısıyla ΔOKE ve ΔCBD üçgenleri, kenarı 2k olan ikizkenar dik üçgenlerdir (Şekil 7). Bu durumda hipotenüs $63 = 5k + 2 \cdot 2k$ olduğundan k=7 bulunur.
Demek ki a=14cm, b=35 cm ve P=490 cm²'dir.



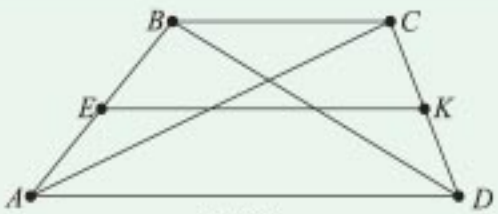
Şekil 7

ÖRNEK 9

Bir yamuğun köşegenleri, büyük tabandaki iç açıların açıortaylarıdır (Şekil 8). Yamuğun çevresi 36 cm ve orta çizgisi 11,7 cm ise, yamuğun kenar uzunlukları kaçtır?

$\measuredangle DAC = \measuredangle BCA$ ve $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$ açıları, zıt açılar (altern iç açılar) olduklarından eşittir; bu nedenle ΔACB ve ΔBDC ikizkenardır. Buradan $\overline{AB} = \overline{BC}$ ve $\overline{BC} = \overline{CD}$ elde edilir. Öyleyse $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = x$, $\overline{AD} = y$ olsun.

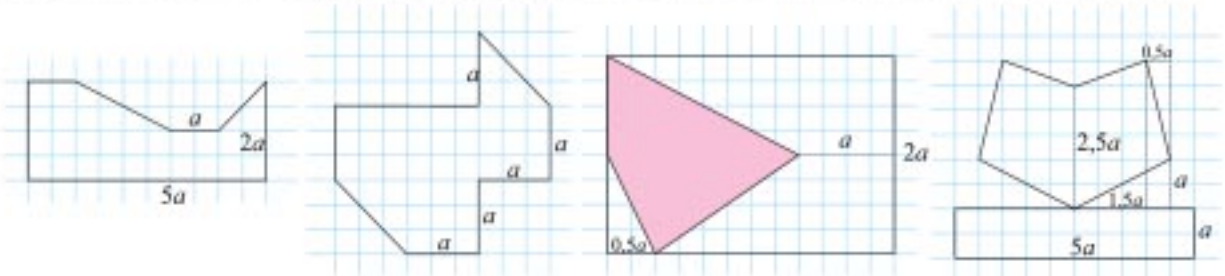
Bu durumda $\begin{cases} 3x + y = 36 \\ \dfrac{x+y}{2} = 11{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6{,}3\,\text{cm} \\ y = 17{,}1\,\text{cm} \end{cases}$ 'dir..



Şekil 8

SORU 7

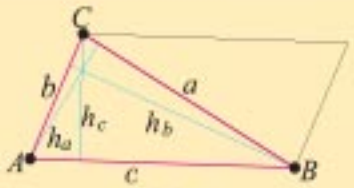
Şekil 9'daki her bir şekil için, alanı ve çevreyi yalnızca kenar a cinsinden ifade eden formülleri türet.



Şekil 9

Üçgenin çevresi ve alanı

Bir kenarı ve ona karşılık gelen yüksekliği (Şekil 10) bilinen bir üçgenin alanı, $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ formülüyle hesaplanır.



Şekil 10

Tüm kenar uzunlukları biliniyorsa $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ (**Heron formülü**) kullanılır.

Kenar uzunluğu a olan **eşkenar üçgenin** alanı $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

ÖRNEK 1

a = 5, b = 4 ve c = 7 kenarlı üçgenin alanı

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-5) \cdot (8-4) \cdot (8-7)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{6 \cdot 4^2} = 4\sqrt{6}$,
burada $s = \frac{5+4+7}{2} = 8$.

ÖRNEK 2

Kenarları 3 cm ve 4 cm olan **dik üçgenin** alanı $P = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm²'dir.

ÖRNEK 3

İki benzer üçgenin alanları 15 ve 18 ise ve birincinin a kenarı 5 ise, ikincinin karşılık gelen a_1 kenarı $a_1^2 = \frac{a^2 P_1}{P} = \frac{25 \cdot 18}{15} = 30$, dolayısıyla $a_1 = \sqrt{30}$'dur.

ÖRNEK 4

İkizkenar bir üçgenin çevresi 64 cm ve yan kenar ile taban arasındaki fark 11 cm'dir. Üçgenin alanını hesapla.

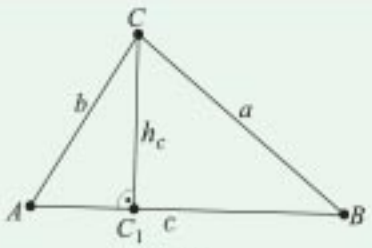
Tabanı a, yan kenarı b olsun. O hâlde $a + 2b = 64$ ve $b - a = 11$. Bu eşitlikleri toplayarak $3b = 75$ bulunur, dolayısıyla b = 25 cm'dir. Buradan a = 14 cm elde edilir. Yükseklik için Pisagor teoreminden $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = 24$ cm bulunur; alan $P = \frac{ah}{2} = 168$ cm²'dir.

ÖRNEK 5

a = 73 dm, b = 52 dm ve h_c = 48 dm ise üçgenin alanını hesapla.

Pisagor teoreminden ΔC_1BC ve ΔAC_1C için (Şekil 11)
$\overline{C_1B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 55$ dm ve $\overline{AC_1} = \sqrt{b^2 - h_c^2} = 20$ dm
elde edilir (Şekil 11), buradan c = 75 dm sonucu çıkar.

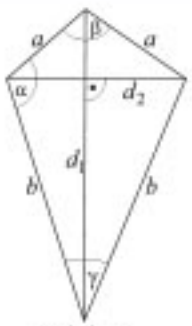
Şimdi, alan $P = \frac{75 \cdot 48}{2} = 1800$ dm²'dir.



Şekil 11

ÖRNEK 6

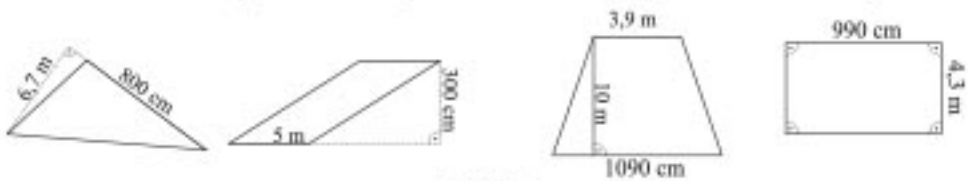
Kenarları $a = 4$ dm, $b = 5$ dm ve $d_1 = 7$ dm olan bir deltoid (d_1 deltoidin simetri eksenidir) (Şekil 12) için
$P = 2 \cdot P_\Delta = 8\sqrt{6}$ dm², burada P_Δ, kenarları a, b ve d_1 olan üçgenin Heron formülüyle hesaplanan alanıdır;
$L = 2(a + b) = 18$ dm ve $d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{16\sqrt{6}}{7}$ dm'dir (Şekil 12).



Şekil 12

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Şekilde verilen verilerden yararlanarak Şekil 13'teki her bir şeklin alanını hesapla.



Şekil 13

2. Alanı 56 cm² ve kenarları a = 5,2 cm ile b = 4,8 cm olan paralelkenardaki yüksekliklerin uzunluklarını belirle.

3. Bir paralelkenarın iki kenarı 3 : 4 oranındadır ve çevresi 28 dm'dir. Paralelkenarın kenar uzunluklarını belirle.

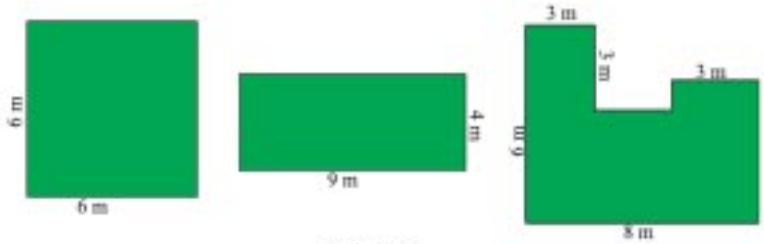
4. Biliniyor ki:
   a) Karenin alanı P = 36 cm². Karenin kenarının ve köşegeninin uzunluklarını belirle.
   b) Karenin çevresi L = 12 cm. Karenin kenarının ve köşegeninin uzunluklarını belirle.

5. a) Alanı 108 dm² ve a = 120 cm olan bir dikdörtgen veriliyor. Diğer kenarın ve dikdörtgenin köşegeninin uzunluğunu belirle.
   b) Çevresi 246 cm ve b = 80 cm olan bir dikdörtgen veriliyor. Diğer kenarın ve köşegenin uzunluğunu belirle.

6. Kenarı a olan bir karenin içine, köşeleri birincinin kenarını 2 : 3 oranında bölen başka bir kare yerleştirilmiştir. Karelerin alanlarının oranını belirle.

7. Tabanları 20 cm ve 12 cm olan, köşegenleri karşılıklı dik olan bir ikizkenar yamudun alanını hesapla.

8. Üç kardeşin çim alanlarının boyutları Şekil 12'de verilmiştir. Bu çim alanların alanını hesapla.



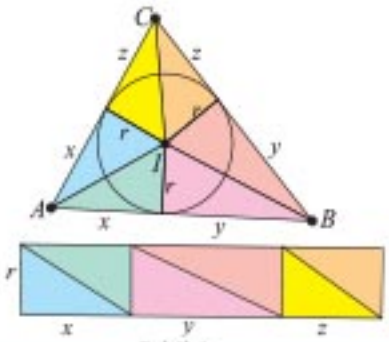
Şekil 12

5.2. İçteğet ve Çevrel Çember Yarıçapının Hesaplanması

ETKİNLİK

Bir geometri yazılımında bir üçgen çiz, içteğet çemberin merkezini belirle ve bu merkezden kenarlara yarıçapları ile köşelere doğru doğru parçalarını çiz.
Bu şekilde altı dik üçgen oluşturmuş olursun.
Bu dik üçgenlerin kopyalarını çıkar ve onlardan bir dikdörtgen oluştur.

Şekil 1'dekine benzer bir görünüm elde etmen gerekir.



Şekil 1

Üçgenin alanı $P = \frac{r(a+b+c)}{2} = r \cdot s$, burada s yarıçevre, r ise üçgene içteğet çemberin yarıçapıdır.
Üçgenin alanı $P = \frac{abc}{4R}$, burada a, b, c kenarlar, R ise üçgenin çevrel çemberinin yarıçapıdır.

ÖRNEK 1

a = 4 cm, b = 6 cm ve c = 8 cm kenarlı ΔABC için içteğet çemberin yarıçapı

$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{9 \cdot (9-4) \cdot (9-6) \cdot (9-8)}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ cm, çevrel çemberin yarıçapı ise

$R = \frac{abc}{4P} = \frac{192}{12\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ cm'dir..

ÖRNEK 2

Bir dik üçgenin dik kenarları 8 dm ve 18 cm'dir. Etrafına çizilen çemberin yarıçapını belirle.

Pisagor teoreminden hipotenüsün uzunluğu $c = \sqrt{80^2 + 18^2} = 82$ cm'dir. Thales teoreminden $R = \frac{c}{2} = 41$ cm elde edilir.

ÖRNEK 3

Bir trafik adası, kenarı 17 m ve tabanı 16 m olan bir ikizkenar üçgen biçimindedir; üçgene içteğet bir dairesel fıskiye yerleştirilmelidir. Fıskiyenin yarıçapını belirle.

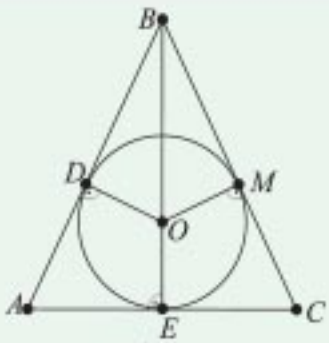
Pisagor teoreminin uygulanmasıyla $\overline{BE}^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2$, dolayısıyla $\overline{BE} = 15$ m'dir (Şekil 2). EC ve MC teğet doğru parçaları olduğundan $\overline{EC} = \overline{MC} = \frac{16}{2} = 8$ m, buradan $\overline{BM} = 17 - 8 = 9$ m elde edilir.

İstenen yarıçap

$$r = \sqrt{\overline{BO}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{\left(\overline{BE} - r\right)^2 - 9^2} = \sqrt{(15 - r)^2 - 81}$$

buradan, karesini alınca $r^2 = 225 - 30 \cdot r + r^2 - 81$

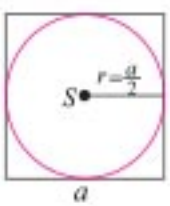
elde edilir, dolayısıyla $r = \frac{144}{30} = \frac{24}{5}$ m



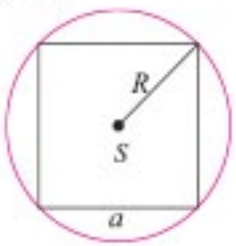
Şekil 2

ÖRNEK 4

Kenar uzunluğu a olan bir karede, içteğet çemberin yarıçapı $r = \frac{a}{2}$'dir (Şekil 3), kenar uzunluğu a olan kareye çevrel çemberin yarıçapı ise $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$'dir (Şekil 4).



Şekil 3



Şekil 4

SORU 2

Kenarları $a = 7$ cm ve $b = 5$ cm olan bir dikdörtgen bir çemberin içine çizilmiştir. Bu çemberin yarıçapını belirle.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Küçük köşegeni 6 cm ve içteğet çember yarıçapı 24 mm olan bir eşkenar dörtgenin alanını hesapla.
2. Kenarları 4 ve 5 olan bir deltoide yarıçapı 2 olan bir çember içteğet edilmiştir. Deltoidin alanını hesapla.

3. Bir eşkenar dörtgene yarıçapı r olan bir çember içteğet edilmiştir. Eşkenar dörtgenin a kenarının uzunluğunu, bunun köşegenlerin toplamından altı kat daha küçük olduğu biliniyorsa, yarıçap cinsinden ifade et.

4. Yarıçapı 12,5 cm olan bir çember içine çizilmiş bir dikdörtgenin, bir kenarı 7 cm ise alanını hesapla.

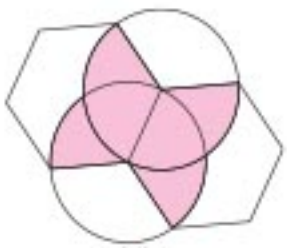
5. Kenarları 8 cm ve 6 cm olan ABCD dikdörtgeni verilidir. AC köşegeniyle, içine çemberler içteğet edilmiş iki üçgene bölünmüştür. Çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklığı belirle.

6. Yarıçapı 8 cm olan bir çember içine bir dikdörtgen çizilmiştir. Dikdörtgenin köşegenleri 56°'lik dar bir açıyla kesişmektedir. Dikdörtgenin çevresini hesapla ve elde edilen sonucu bir ondalığa yuvarla.

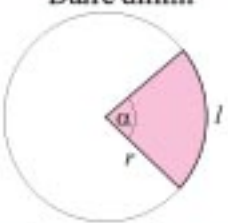
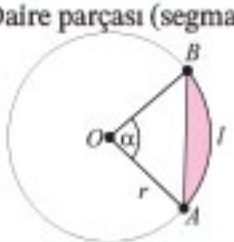
5.3. Dairenin ve Daire Parçalarının Alanı

SORU 1

Kenarları a = 10 cm olan ve ortak bir kenarları bulunan iki düzgün altıgen verilimiştir. Ortak kenarın uç noktalarında yarıçapı r = 10 cm olan iki çember çizilmiştir. Şekil 1'deki gibi, kesişimleriyle elde edilen şeklin alanını hesapla.



Şekil 1

Daire dilimi 	Yarıçapı r olan bir daire dilimi, iki yarıçap arasında kalan daire parçasıdır	$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$ veya $P = \frac{lr}{2}$
Daire parçası (segman) 	Bir kirişle sınırlanan daire parçasıdır.	$P = P_1 - P_{\Delta ABO}$, burada P_1 daire diliminin alanıdır.
Dairesel halka 	İki eşmerkezli çemberle sınırlanan düzlem bölgesidir.	$P = r_1^2\pi - r_2^2\pi$

ÖRNEK 1

Yarıçapı 6 cm olan bir dairenin, merkez açısı 45° olan daire diliminin alanı $P = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\frac{3\pi}{2}6 = \frac{9\pi}{2}$ cm² eşittir.

ÖRNEK 2

Yarıçapı 6 cm olan bir dairenin, merkez açısı 45° olan daire parçasının (segman) alanı $P = \frac{9\pi}{2} - \frac{1}{2}r^2 \sin 45° = \frac{9\pi}{2} - 18\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\pi - 18\sqrt{2}}{2}$ cm² eşittir..

ÖRNEK 3

Yarıçapları 5 ve 4 olan iki eşmerkezli çemberden oluşan dairesel halkanın alanı $P = (5^2 - 4^2)\,\pi = 9\pi$ olur.

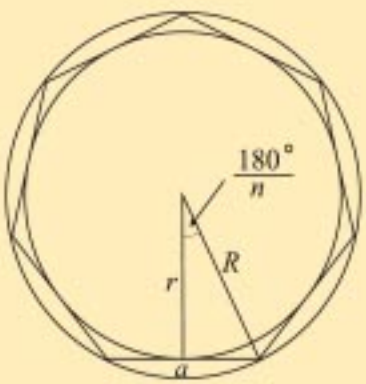
ÖRNEK 4

Yarıçapı 6 olan bir çember 8 eşit parçaya, yarıçapı 8 olan başka bir çember 6 eşit parçaya bölünmüştür. Her birinden birer dilim alınıyor. Hangi dilimin alanı daha büyüktür?

$P_1 = \frac{6^2\pi\frac{360°}{8}}{360°} = \frac{36\pi}{8}$ ve $P_2 = \frac{8^2\pi\frac{360°}{6}}{360°} = \frac{64\pi}{6}$. Açıktır ki $P_2 > P_1$.

Bir düzgün n-genin kenarı a, içteğet çemberinin yarıçapı r, çevrel (dıştan teğet) çemberinin yarıçapı R olsun. O hâlde

$r = R\cos\frac{180°}{n}$ ve $a = 2r\,\text{tg}\,\frac{180°}{n}$ (Şekil 2).



Şekil 2

Düzgün n-genin çevresi, verilen öğelere bağlı olarak şu formüllerden biriyle hesaplanır:

$L = na$, $L = 2nR\sin\frac{180°}{n}$, $L = 2nr\,\text{tg}\,\frac{180°}{n}$.

Düzgün n-genin alanı (verilen öğelere bağlı olarak) aşağıdaki formüllerden biriyle hesaplanır.

$P = \frac{1}{2}nar$, $P = \frac{1}{2}Lr$, $P = nR^2 \sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$, $P = \frac{a^2 n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, $P = nr^2 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

ÖRNEK 5

Bir dairesel halkanın alanı, küçük çemberin alanının dörtte birine eşittir. Çemberlerin yarıçaplarının oranını belirle.

Şarttan $(R^2 - r^2)\pi = \frac{1}{4}r^2\pi$ elde ediyoruz: $R^2 = \frac{5}{4}r^2$ t.e. $R : r = \sqrt{5} : 2$.

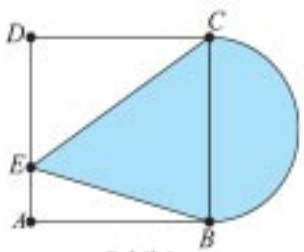
ÖRNEK 6

AB yayı uzunluğu π cm ve karşılık gelen merkez açısı $\alpha = 15^\circ$ ise, çemberin çevresini aşağıdaki şekilde belirleriz:

$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ Koşuldan $l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{L\alpha}{360^\circ}$, t.e. $L = \frac{l \cdot 360^\circ}{\alpha}$ elde ederiz. Yani, gerekli çevre $L = 24\,\pi$cm.

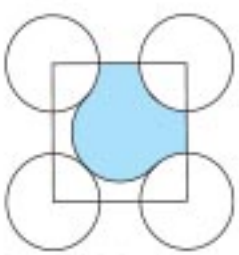
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir çember üzerinde yatan A noktasından uzunlukları 9 cm ve 17 cm olan iki kiriş çekilmiştir. Kirişlerin orta noktaları arasındaki uzaklık 5 cm ise, çemberin yarıçapını belirle.
2. $\overline{AB} = 6$ cm ve $\overline{AC} = 8$ cm kirişleri birbirine diktir. Dairenin alanını belirle.
3. Şekil 3'te boyalı şeklin alanını hesapla; burada ABCD köşegeni 4 cm olan bir karedir, BC yarım dairenin çapıdır ve E, AD kenarı üzerindeki rastgele bir noktadır.



Şekil 3

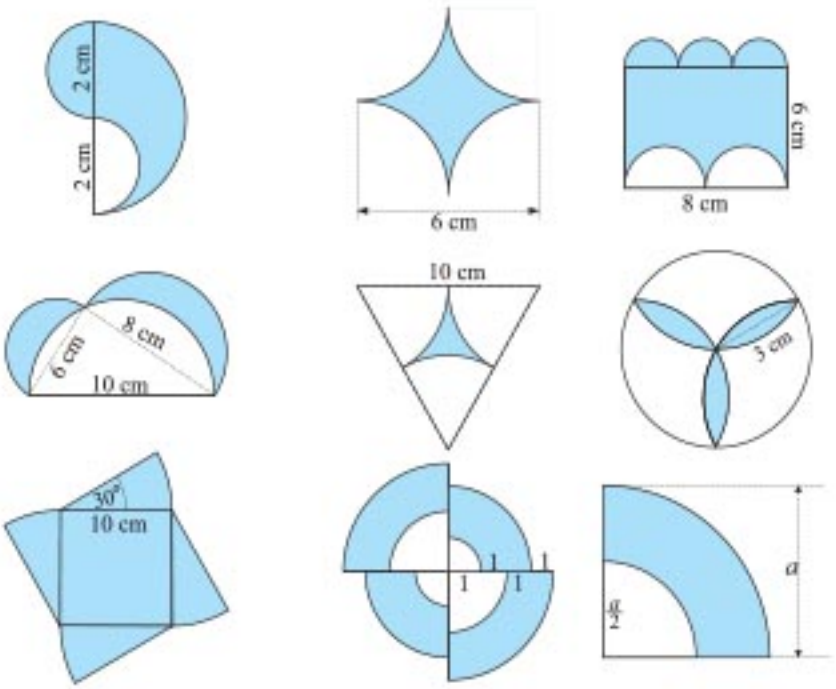
4. Yarıçapı R = 10 cm olan bir yarım daireden, merkezleri yarım dairenin çapı üzerinde bulunan ve birbirine teğet olan yarıçapları $r_1 = 3$ cm ve $r_2 = 7$ cm olan iki yarım daire kesilmiştir. Kalan kısmın alanını belirle.
5. Tümü yarıçapı 1 cm olan çemberlerle ilgili Şekil 4'te taralı kısmın alanını hesapla. Dört çemberin merkezleri karenin köşelerindedir ve bu dört çember, beşinci çembere dıştan teğettir.


Şekil 4

6. Aşağıdakilerin çevresini ve alanını hesapla:
   a) Çevrel çember yarıçapı R = 7 cm olan düzgün ongen,
   b) İçteğet çember yarıçapı $r = \sqrt{2}$ cm olan düzgün dokuzgen.

7. Bir çember içine düzgün bir sekizgen çizilmiştir, çevresine ise düzgün bir altıgen çizilmiştir. Çokgenlerin alanlarının oranını belirle.

8. Şekil 5'teki her bir çizimde verilen verilere göre mavi bölgelerin alanını hesapla.



Şekil 5

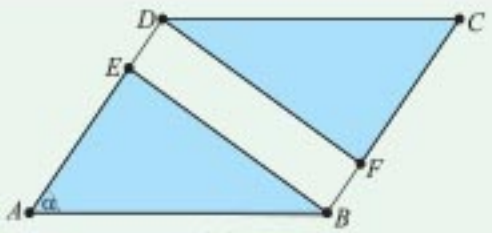
5.4. Teoremlerin Problem Durumlarında Uygulanması

ÖRNEK 1

Kenarları a = 9 dm ve b = 7 dm, dar açısı α = 58° olan bir paralelkenar verilmiştir. Ondan, Şekil 1'deki gibi bir dikdörtgen çıkarılmıştır. Dikdörtgen olmadan paralelkenarın kısmının alanını hesapla?

Dik üçgen ABE'den şu sonuç elde edilir ki $\overline{BE} = \overline{AB} \cdot \sin 58° \approx 7{,}6$ dm, ve $\overline{AE} = \overline{AB} \cdot \cos 58° \approx 4{,}8$ dm'dir. Dolayısıyla, dikdörtgenin kenarları c = 7,6 dm ve d = 7 – 4,8 = 2,2 dm'dir; bu hâlde alanı $P_1 = 16{,}72$ dm².

Sonuç olarak, dikdörtgensiz paralelkenar parçasının alanı $P = ab \sin 58° - P_1 \approx 36{,}71$ dm²'dir.



Şekil 1

BİT ETKİNLİĞİ

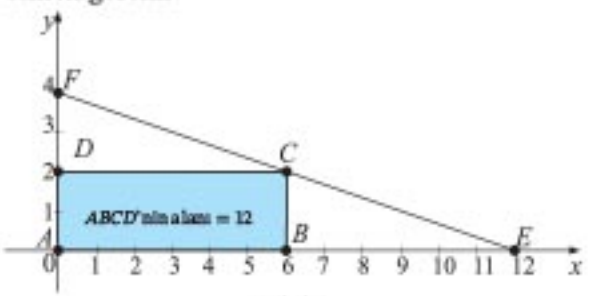
Geometrik yazılımda $x + 3y = 12$ doğrusunu çiz. Daha sonra, A köşesi koordinat başlangıcında, C köşesi ise birinci bölgede bu doğru üzerinde olacak şekilde ABCD dikdörtgenini çiz (Şekil 2). C noktasını doğru boyunca hareket ettir ve aşağıdaki soruları yanıtlamayı dene:

a) Yatay kenar 3 ise dikdörtgenin alanı kaçtır?

b) Alan 10 ise kenarlar kaçtır?

c) En büyük alan elde etmek için dikdörtgenin kenarları ne olur?

Aşağıdaki görünümü elde etmen gerekir:



Şekil 2

ÖRNEK 2

Bir ev sahibi, bahçesine çim ekmek istiyor.
Metrekare başına 30 ile 50 gram tohum gerektiği biliniyor. Bahçenin krokisi, kenarları 10 metre ve 7 metre olan bir dikdörtgendir. Fıskiye, çapı 5 metre olan bir yarım daireyle; sera ise tabanları 2 metre ve 6 metre, yüksekliği 3 metre olan ikizkenar bir yamayla gösterilmiştir (Şekil 3). Bahçe için kaç kilogram çim tohumu gerekir?



Şekil 3

$P = 10 \cdot 7 - 0{,}5 \cdot 2{,}5^2 \cdot \pi - (2 + 6) \cdot 3 \cdot 0{,}5 \approx 48{,}1875$ m². Dolayısıyla, metrekare başına 1445,625 ile 2409,375 gram, yani 1,45 ile 2,4 kilogram arasında çim tohumu gerekir.

BİT ETKİNLİĞİ

Geometrik yazılımda kenarı 5 cm olan bir kare çiz. Sonra, karenin kenarlarını 3 : 2 oranında böl ve içine yeni bir kare çiz. Aynı şekilde ikinci karenin içine üçüncü, vb. kareleri çiz. Dördüncü içteki karenin alanını hesapla. Şekil 4'teki gibi bir şekil elde etmen gerekir.



Şekil 4

ÖRNEK 3

Boyutları 805 cm ve 420 cm olan bir zemin, kare karo ile kaplanmalıdır. Karolar derzsiz döşenecektir. Karo kesimini en aza indirmek için hangi karo kenar uzunluğu seçilmelidir? Aynı zemini kaplayacak dikdörtgen karoların boyutlarını da belirleyebilir misin? Karo kenarları doğal sayılar olmalıdır.

805 ve 420'nin en büyük ortak bölenini arıyoruz. Bu sayı 35'tir. O hâlde 276 kare karo gereklidir.
$35 = 7 \cdot 5 = 35 \cdot 1$ olduğundan iki tip dikdörtgen karo seçilebileceği sonucuna varılır.

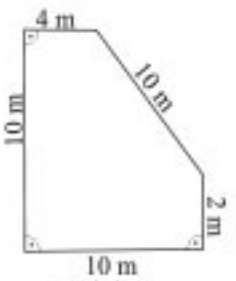
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir yamuğun tabanları a = 25 cm ve b = 15 cm, yan kollardan biri c = 8 cm'dir. Büyük tabana ait açılar toplamı 90° ise, yamuğun çevresini ve alanını belirle..

2. Bir kutu boya, kenarlarından biri diğerinin üç katı olan bir dikdörtgen biçimindeki karton parçasını boyamaya yeterlidir. Karton parçasından, uzun kenarı 18 cm kısaltıp diğer kenarı 8 cm uzatarak yeni bir dikdörtgen yapılırsa aynı miktarda boya harcanacaktır. Yeni dikdörtgenin çevresini belirle.

3. Kare ABCD'nin kenar uzunluğu 36 cm'dir. AB kenarı üzerinde, B tepesinden 12 cm uzaklıkta E noktası seçilmiştir; BC kenarının orta noktasında F noktası bulunur ve CD kenarı üzerinde, C tepesinden 12 cm uzaklıkta G noktası seçilmiştir. EFG üçgeninin iç bölgesinde ve AFD üçgeninin dış bölgesinde kalan kısmın alanını belirle.

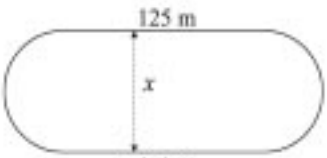
4. Bir çalışma odasının zemini, boyutları Şekil 5'te verilen 30 cm × 40 cm ölçülerindeki karolarla kaplanacaktır. Odanın ölçülerine göre kaç karo gerektiğini hesapla (Şekil 5).



Şekil 5

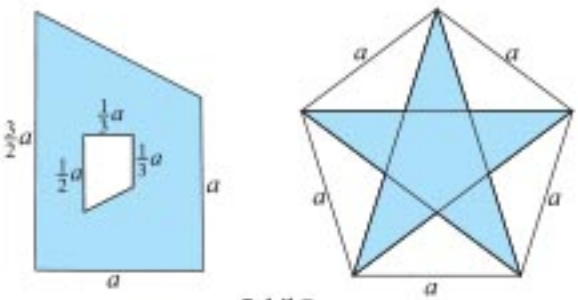
5. Bir çemberin içine düzgün sekizgen çizilmiş, çevresine ise bir kare çizilmiştir. Çokgenlerin alanlarının oranını belirle.

6. Bir koşu pisti 450 metre uzunluğunda olup, her biri 125 metre olan iki düz kısım ve iki yarım daire kısmından oluşur (Şekil 6). Pistteki düz kısımlar arasındaki x uzaklığını hesapla. Pist içi çimle kaplanacaktır. Çimin kaplayacağı alan ne kadardır?



Şekil 6

7. Şekil 7'de verilen verilere göre, mavi şekillerin alanını a cinsinden ifade et; sonra her bir Şekil 7 için a = 2,4 m iken alanlarını belirle.



Şekil 7

8. Bir bahçe, Şekil 8'deki gibi düzgün üçgen biçimindedir. Güllerin ekildiği kısım, birinci üçgene içte çizilmiş ve köşeleri birinci üçgenin kenarlarının orta noktaları olan düzgün üçgen biçimindedir. Birinci üçgenin kenarı 10 m ise, güllerin ekildiği kısmın alanını belirle.


Şekil 8

5.5. 3B-Biçimlerin Alanı ve Hacmi

Bir 3B biçim her yönden sınırlı olmalıdır. Biçimin kapladığı uzay kısmını dışındaki kalan kısımdan ayıran sınır, biçimin yüzeyi olarak adlandırılır. Buna göre, 3B biçim, iç bölge ile sınırın birleşimidir. 3B biçime ayrıca geometrik cisim de denir.

Prizma. Prizmanın Yüzey Alanı ve Hacmi

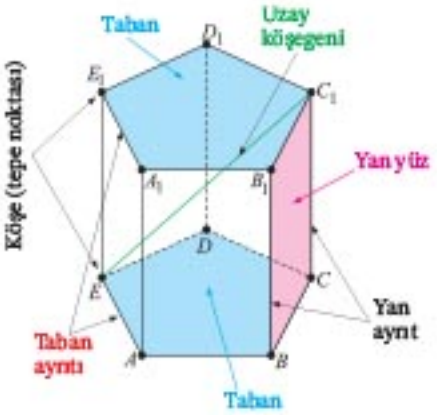
SORU 1

Kenarları 1 cm olan 8 özdeş küpü kaç farklı şekilde düzenleyip dik prizma elde edebilirsin? Her düzen için prizmanın yüzeyini oluşturan karelerin sayısını belirle.

Dik prizma, iki eş ve paralel çokgen ile, çokgenlerin kenar sayısı kadar dikdörtgenle sınırlanan köşeli bir 3B biçimdir.

Paralel düzlemler üzerinde yer alan iki eş çokgene **tabanlar** (bazlar) denir; dikdörtgenler prizmanın **yan** yüzleridir ve bunların prizmanın **mantosunu** oluşturduğunu söyleriz. Eş çokgenlerin kenarlarına **taban ayrıtları**, tabanlardan birine ait olmayan dikdörtgenlerin kenarlarına ise **yan ayrıtlar** denir. Prizmanın ayrıtlarının ortak noktalarına prizmanın **köşeleri** denir (Şekil 1).

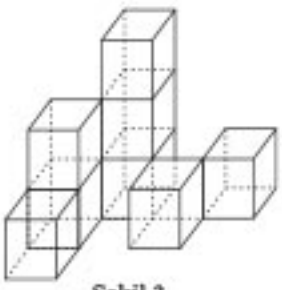
Tabanındaki çokgene göre prizma: üçgen prizma, dörtgen prizma, beşgen prizma vb. olabilir. Prizmanın tabanları arasındaki uzaklığa **prizmanın yüksekliği** denir ve H ile gösterilir (Şekil 2).

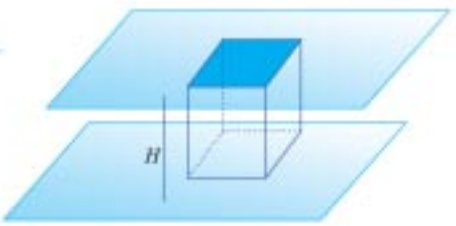


Şekil 1

ÖRNEK 1

Şekil 3'teki 3B biçimin yüzeyi, kenarı a olan 40 kareden oluşur; dolayısıyla yüzey alanı $P = 40a^2$'dir.


Şekil 3



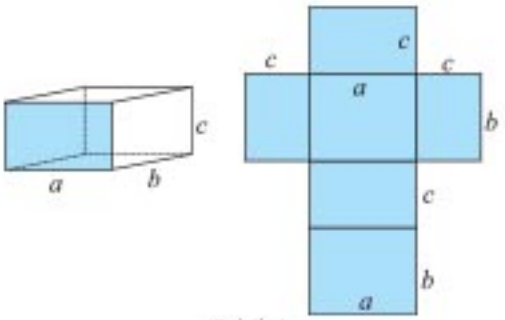
Şekil 2

Bir prizmanın yüzey **alanı**, iki tabanın alanları ile prizmanın mantosunu oluşturan çokgenlerin alanlarının toplamıdır.

Yüzey alanını P, taban alanını B ve mantonun alanını M ile gösterirsek $P = 2B + M$ olur. Dik prizmanın yan yüzleri, bir kenarı taban ayrıtı, öbür kenarı prizmanın yüksekliği H olan dikdörtgenlerdir; bu yüzden mantonun alanı tabanın çevresi ile yüksekliğin çarpımına eşittir, yani $M = L \cdot H$.

SORU 2

Bir hediye, dikdörtgenler prizması biçimindedir ve Şekil 4'te gösterildiği gibi süs kâğıdıyla kaplanacaktır. Hediye boyutları 4 cm, 5 cm ve 11 cm ise ne kadar kâğıt gereklidir?

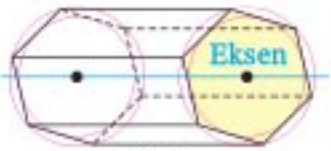


Şekil 4

Kenarları a, b ve c olan bir dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı $P = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + bc + ca)$ formülüyle hesaplanır.

Tabanı düzgün çokgen olan bir dik prizmaya **düzgün prizma** denir.

Düzgün prizmada tabanların merkezlerinden (tabandaki içte çizilen ve dışta çizilen çemberlerin merkezleri) geçen doğruya prizmanın **ekseni** denir (Şekil 5).



Şekil 5

ÖRNEK 2

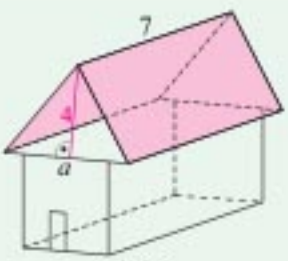
Bir yardımcı binanın çatısı düzgün üçgen prizma biçimindedir. Çatıyı yeniden kaplamak için ne kadar saç gereklidir, eğer çatı 7 metre uzunluğunda ve 4 metre yüksekliğindeyse?

Çatı yalnızca prizmanın iki yan yüzünden oluşur; dolayısıyla Şekil 6'da taban ayrıtı a bulunmalıdır. Eşkenar üçgende yükseklik formülünden

$h = 4 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, buradan $a = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ m elde edilir.

O halde gerekli toplam sac alanı

$2 \cdot 7 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 64{,}6\ \text{m}^2$'dir.

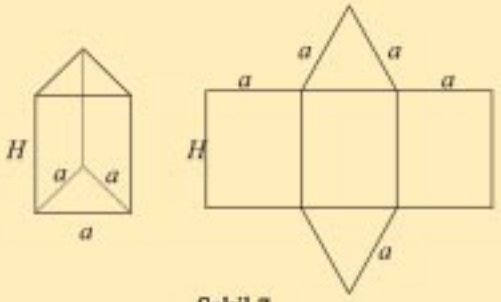


Şekil 6

Düzgün üçgen prizmanın taban kenarı a, yükseklik H yüzey alanı şu formülle hesaplanır

$$P = 2B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

(Şekil 7):



Şekil 7

SORU 3

Düşün ve aşağıdaki soruları yanıtla:

a) Bir dik prizmanın en az yan yüz sayısı kaçtır?

b) Yediyüzlü (yedigen tabanlı) bir prizmanın toplam kaç köşe (tepe noktası) ve kaç ayrıtı vardır?

c) Ayrıt sayısı 13 olan bir dik prizma var mıdır?

SORU 4

Bir müstakil evin bahçesinde, genişliği 3 m, uzunluğu 4 m ve yüksekliği 2 m olan dikdörtgenler prizması biçiminde bir garaj inşası planlanmaktadır. Duvarların ve çatının kalınlığı 40 cm, zeminin kalınlığı ise 50 cm'dir. Garajı yapmak için ne kadar beton gereklidir?

Dik prizmanın hacmi $V = B \cdot H$ formülüyle hesaplanır; burada B taban alanı, H prizmanın yüksekliğidir.

Kenar uzunlukları a, b ve c olan dikdörtgenler prizmasının hacmi $V = abc$ formülü ile hesaplanır.

Prizmanın Bir Düzlemle Kesitleri

Bir 3B şekil ile bir düzlemin tüm ortak noktalarının kümesine, şeklin **düzlemsel kesiti** denir.

Bunlar aşağıdaki kesitlerdir:

- **Paralel kesit:** Düzlem, prizmanın tabanlarına paralel olduğunda elde edilir; ortaya çıkan çokgen, tabanlarla eş (kongruent) olur.
- **Köşegen (diyagonal) kesit:** Düzlem, iki komşu olmayan yan ayrıt üzerinden geçtiğinde elde edilir; ortaya çıkan çokgen bir paralelkenardır.

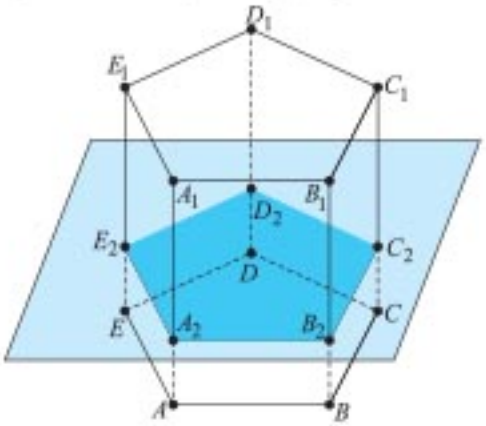
- **Eksen kesiti**, düzlemin prizmanın eksenini içermesiyle elde edilir ve elde edilen çokgen bir paralelgendir.

ÖRNEK 3

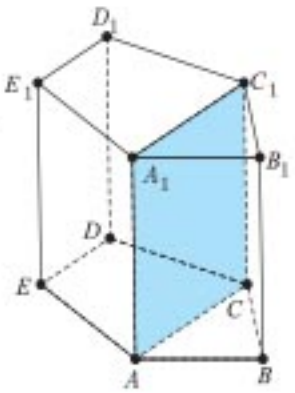
a) Şekil 8'de beşgen prizmadaki paralel kesit gösterilmiştir.

b) Beşgen prizmadaki diagonal kesit Şekil 9'da gösterilmiştir.

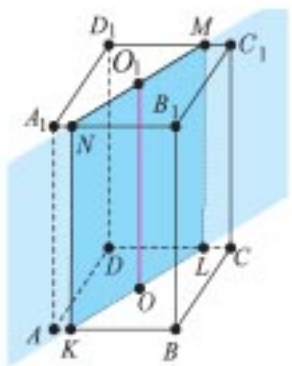
c) Şekil 10'da düzgün dörtgen prizmadaki eksen kesiti gösterilmiştir. Bu eksen kesiti diagonal değildir.



Paralel kesit
$A_2B_2C_2D_2E_2$
Şekil 8



Diyagonal kesit
ACC_1A_1
Şekil 9



OO_1 ekseni
Eksenel kesit $KLMN$
Şekil 10

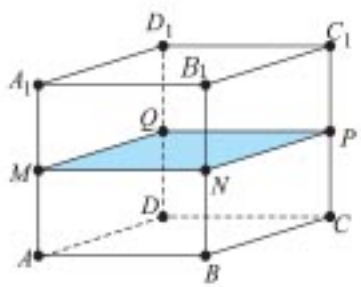
ÖRNEK 4

Kenar uzunluğu a = 6 cm olan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ küpü verilsin.

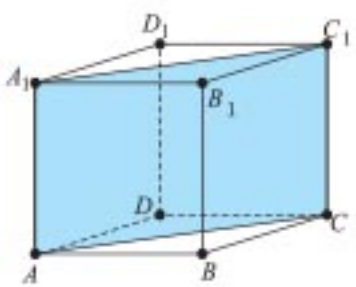
a) Yan ayrıtların AA_1, BB_1, CC_1 ve DD_1 orta noktaları olan M, N, P ve Q noktalarından geçen paralel kesit MNPQ, tabanla eş bir çokgendir, yani kenarı a = 6 cm olan bir karedir ve alanı $P_1 = a^2 = 36$ cm²'dir (Şekil 11).

b) Küpteki diagonal kesit ACC_1A_1, kenarları a = 6 cm ve tabanın köşegeni $d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm olan bir dikdörtgendir; dolayısıyla alanı $P_2 = a \cdot d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ cm²'dir (Şekil 12).

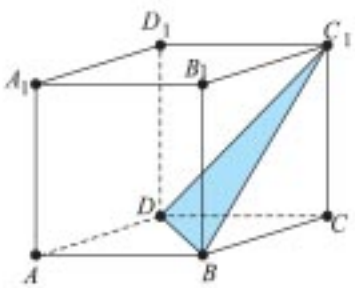
c) Tabanın köşegeninden ve iki komşu yan yüzün köşegenlerinden geçen rastgele kesit, kenarları yan yüzlerin ve tabanın köşegenlerine eşit olan bir eşkenar üçgendir; yani $d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm, bu nedenle alanı $P_3 = \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$ cm²'dir (Şekil 13).



Şekil 11



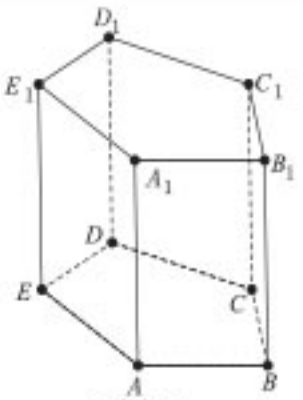
Şekil 12



Şekil 13

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Şekil 14'te bir beşgen prizma verilmiştir.
   a) C1 ve E köşelerinden çekilen tüm uzay köşegenlerini yaz.
   b) ABB_1A_1, CC_1D_1D ve AA_1E_1E yan yüzlerinin köşegenlerini yaz.



Şekil 14

2. Tabanı köşegenleri $d_1 = 8$ cm ve $d_2 = 6$ cm olan bir eşkenar dörtgen (romb) ve yüksekliği H = 10 cm olan dörtgen prizmanın alanını hesapla.

3. Ayrıt uzunluğu 8 cm olan düzgün eşkenar altıgen prizmanın alanını hesapla.

4. Taban alanı 48 cm2, diagonal kesit alanı 150 cm2 ve yüksekliği 15 cm olan bir dikdörtgenler prizmasında taban ayrıtlarını hesapla. Taban ayrıtlarının uzunluklarının doğal sayılar olduğu biliniyor.

5. Bir doğru prizmanın yüksekliği 30 cm, tabanı ise kenarı 13 cm olan ve taban köşegenleri 5 : 12 oranında bulunan bir rombtur. Diagonal kesitlerin alanını hesapla.

6. Kenarı a olan bir küpün iç kısmından daha küçük bir küp çıkarılırsa boş bir küp elde edilir. İç küpün ayrıtı dış küpün ayrıtının yarısı ise boş küpün hacmi ne kadardır?

7. Bir dikdörtgenler prizmasının taban ayrıtları 4 : 3 oranındadır ve yüksekliği 15 cm'dir. Taban çevresi 21 cm ise prizmanın hacmini hesapla.

8. Doğru dörtgen prizmanın tabanı, köşegeni 17 cm olan ve kenarları 9 cm ile 10 cm olan bir paralelgendir ve prizmanın alanı 334 cm2'dir. Prizmanın hacmini hesapla.

5.6. Silindir. Silindirin Alanı ve Hacmi

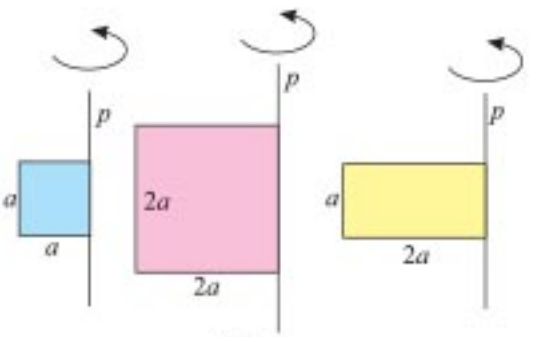
SORU 1

Şekil 1'de gösterildiği gibi, her bir şeklin p doğrusu etrafında döndürülmesiyle bir silindir elde edilir. Aşağıdaki soruları cevapla:

a) Her bir silindirin yüksekliği ne kadardır?

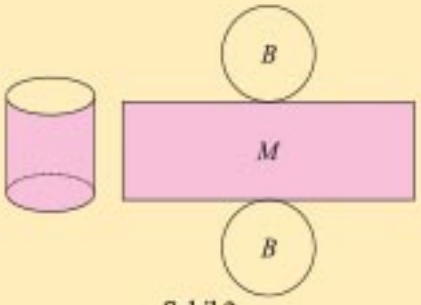
b) Dönme ile elde edilen dairenin yarıçapı ne kadardır?

c) Her bir silindirin alanı ne kadardır?



Şekil 1

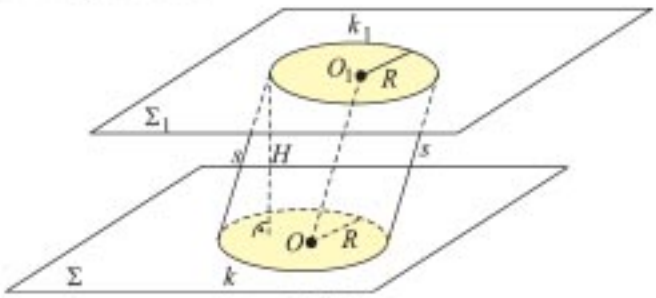
Eğer taban alanını B, yan alanı ise M ile gösterirsek, doğru silindirin alanı (Şekil 2) $P = 2B + M = 2R^2\pi + 2R\pi H = 2R\pi(R + H)$ olur.



Şekil 2

$k(O, R)$ ve $k_1(O_1, R)$, sırasıyla Σ ve Σ_1 paralel düzlemlerinde yatan iki çember olsun. O hâlde $X \in k(O, R)$, $Y \in k_1(O_1, R)$ ve $XY \parallel OO_1$ koşullarını sağlayan XY doğru parçalarının tüm noktalarının kümesine **silindir** denir.

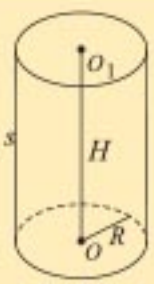
OO_1 doğru parçasına silindirin ekseni denir. Eğer $OO_1 \perp \Sigma$ ise, silindir doğru (**dik**) olarak adlandırılır. k ve k_1 çemberleri silindirin **tabanlarıdır**. Bunlar eş (benzer) çemberlerdir ve yarıçapları **silindirin yarıçapı** olarak adlandırılır. $XY \parallel OO_1$ olacak şekilde, X noktası k çemberi üzerinde ve Y noktası k_1 çemberi üzerinde bulunan tüm XY doğru parçalarının birleşimine silindirin **yan yüzeyi** denir. Bu doğru parçalarının her birine (hepsi eş uzunluktadır) **jeneratris** denir. Σ ve $\Sigma 1$ düzlemleri arasındaki uzaklığa **silindirin yüksekliği** H denir.



Şekil 3

Bundan sonra yalnız doğru silindirlerle çalışacağız. Şekil 3'te jeneratris uzunluğu s, yüksekliği H, yarıçapı R ve ekseni OO_1 olan bir silindir gösterilmiştir.

Doğru silindirde $s = H = \overline{OO_1}$'dir (Şekil 4).

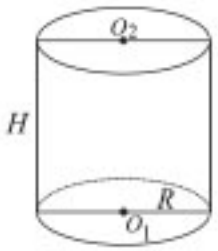


Şekil 4

Eğer doğru silindirde tabanın çapı yüksekliğe eşitse, silindir **eşkenar** olarak adlandırılır.

Demek ki, eşkenar silindirde $d = 2R = H$ geçerlidir.

Şekil 5'te yüksekliği H ve taban yarıçapı r olan bir eşkenar silindir gösterilmiştir.



$H=2r$

Şekil 5

ÖRNEK 1

Yüksekliği 8 cm ve taban çevresi 20 π cm olan bir silindirin alanını hesapla.

Silindirin alanını hesaplamak için yarıçapı verilen çevreden bulmak gerekir; yani $L = 2R\pi = 20\ \pi$ olduğundan $R = 10$ cm'dir. O hâlde, $P = 20\pi\ (10 + 8) = 360\pi$ cm².

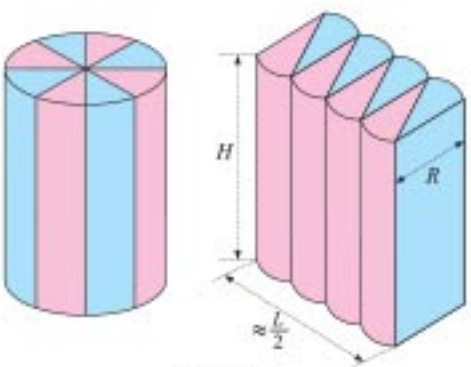
SORU 2

Eşkenar bir silindirin taban yarıçapı 75 mm'dir. Silindirin alanını hesapla.

Şekil 6'daki silindir, biçimi dikdörtgenler prizmasına yakın olan bir 3B-şekli oluşturan eşit parçalara ayrılmıştır. Silindir ne kadar çok parçaya bölünürse, elde edilen şekil o kadar çok dikdörtgenler prizmasının biçimini alır.

Dikdörtgenler prizmasının hacmi $V = B \cdot H$ olup, burada B taban alanı, H ise silindirin yüksekliğidir.

Prizmanın tabanı, kenarları R ve $\frac{L}{2} = \frac{2R\pi}{2} = R\pi$ olan bir dikdörtgendir.



Şekil 6

Dolayısıyla $B = R\pi \cdot R = R^2\pi$'dir. Prizmanın hacmi $V = R^2\pi H$ olur. Buradan, silindirin hacminin de $V = R^2\pi H$ olduğu sonucuna varabiliriz.

ÖRNEK 2

Yarıçapı R olan eşkenar bir silindirin hacmini hesapla.

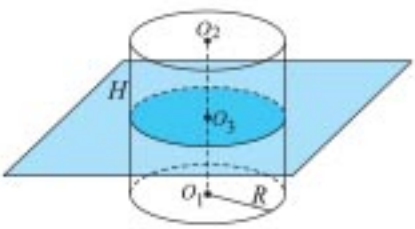
$H = 2R$ olduğundan, $V = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi$.

SORU 3

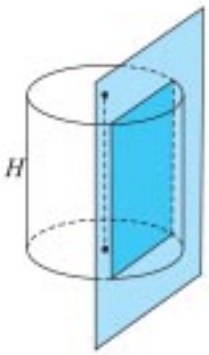
Taban çapı 60 cm ve yüksekliği 7,5 dm olan bir silindirin hacmini hesapla.

Silindirin Bir Düzlemle Kesitleri

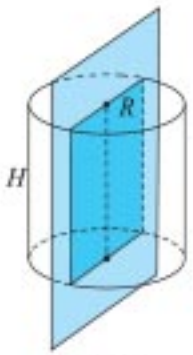
- **Paralel kesit** düzlemin tabanların düzlemlerine paralel olması hâlinde elde edilir. Bu durumda kesit, yarıçapı silindirin yarıçapına eşit olan bir dairedir ve düzlem, yüksekliğe diktir (Şekil 7).
- **Boyuna kesit** düzlemin silindirin eksenine paralel olması hâlinde elde edilir. Kesit, kenarlarından biri silindirin yüksekliğine eşit olan bir dikdörtgendir (Şekil 8).
- **Eksenel kesit** düzlemin silindirin eksenini içermesi hâlinde elde edilir ve kesit, kenarları jeneratris ve silindirin çapı olan bir dikdörtgendir (Şekil 9). Eşkenar bir silindirde bu kesit karedir.



Şekil 7



Şekil 8



Şekil 9

ÖRNEK 3

Bir silindirin eksenel kesiti alanı 25 cm² olan bir karedir. Silindirin yarıçapını ve yüksekliğini belirle.

Eksenel kesit kare olduğundan d = H (burada d silindirin taban çapıdır). Öyleyse $d^2 = 25$ cm² olduğundan d = 5 cm, yani H = 5 cm ve $R = \frac{d}{2} = 2{,}5$ cm.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Eşkenar bir silindirin yan yüzey alanı 20 cm² ise silindirin yüzey alanını hesapla.
2. Bir doğru dairesel silindirin yan yüzey alanı 192 π cm², taban çapı 20 cm'dir. Silindirin hacmini hesapla.
3. Hacmi 112 π cm³ ve yüksekliği 7 cm olan bir doğru dairesel silindirin yüzey alanını hesapla.
4. Bir doğru dairesel silindirin hacmi 375 π cm³ ve yüksekliği taban yarıçapının üç katıdır. Silindirin yüzey alanını hesapla.

5. Dikdörtgen *ABCD*, kenarları $\overline{AB} = 13$ cm ve $\overline{BC} = 27$ cm olan, BC'ye paralel ve ondan 5 cm uzaklıktaki bir eksen etrafında döndürülüyor. Bu dönme sonucunda elde edilen şeklin yüzey alanını hesapla.

6. Bir silindirin paralel kesitinin alanı 25π cm²'dir. Yükseklik, taban çapının üç katıysa silindir ne kadar yüksektir?

7. Bir silindirin yüksekliği 6 cm, taban yarıçapı 5 cm'dir. Eksenden 4 cm uzaklıktaki boyuna kesitin alanını belirle.

5.7. 3B-Şekillerin Alan ve Hacminin Uygulanması

SORU 1

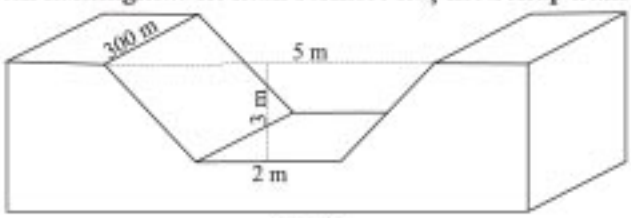
Bir spor sahasında yağmur suyunun akması için 300 metre uzunluğunda ve 3 metre derinliğinde bir kanal kazılmıştır. Kanalın enkesiti, tabanları 2 metre ve 5 metre olan ikizkenar bir yamuktur (Şekil 1).

a) Kanalın yapılması için sahadan ne kadar litre toprak çıkarılmıştır?

b) Su yüksekliği 1 metreye ulaştığında ne kadar litre su birikecektir?

c) Kanalın yapımı için ne kadar çim alanı kaldırılmıştır?

ç) Kanalın tabanına 10 cm kalınlığında iri kum serilirse kaç metreküp kum gereklidir?



Şekil 1

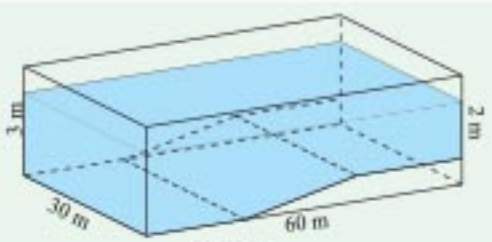
ÖRNEK 1

Bir havuzun uzunluğu 60 m ve genişliği 30 m'dir (Şekil 2). Uzunluğun ilk üçte birinde derinlik 2 m'dir. Orta üçte birinde derinlik eğimli olarak 3 m'ye iner. Son üçte birinde derinlik 3 m'dir. Su seviyesi kenardan 30 cm aşağıda olacak şekilde doldurulursa havuzda kaç litre su bulunur?

Havuzun hacmi, boyutları 60 m, 30 m ve 2,7 m olan dört yüzlü prizmanın hacminden, tabanı dikdörtgen yamuk olan tabanları 40 m ve 20 m, yüksekliği 1 m dört yüzlü prizmanın hacminin çıkarılmasıyla bulunur, yani

$$V = 60 \cdot 30 \cdot 2{,}7 - \frac{(40+20)\cdot 1}{2} \cdot 30 = 3960\,\text{m}^3 = 3960 \cdot 10^3$$

litre su.



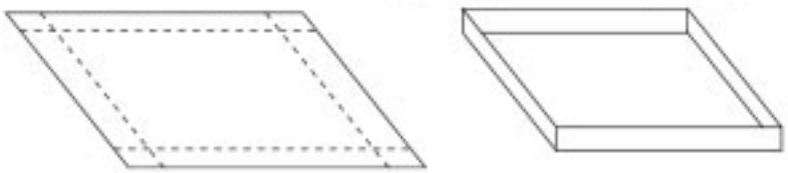
Şekil 2

SORU 2

Gelecekte havuzun iç yüzeyine döşenmiş fayansların değiştirilmesi gerekecektir. Önceki örnekteki verileri kullanarak, gerekli fayans sayısının belirleneceği yüzey alanını metrekare cinsinden hesapla.

ETKİNLİK

Genişliği 21 cm ve uzunluğu 29,7 cm olan beyaz bir kâğıt al ve dört köşesinin her birinde kenarı 1 cm olan kareleri işaretle (ve kes) (Şekil 3). Tüm kenarları birleştirdiğinde elde edilen kutunun hacmini hesapla. Sonra kenarı 2 cm olan kareleri işaretle ve yeni hacmi hesapla. En büyük hacme sahip kutuyu elde etmek için karenin kenarının ne kadar olması gerektiğini belirlemeye çalış.



Şekil 3

SORU 3

Bir kablonun iletken teli 1,5 mm çapındadır. Telin etrafında yalıtım vardır (Şekil 1). Bu şekilde kablonun çapı 3 mm olur. Telin özgül yoğunluğunun 7800 kg/m^3 ve yalıtımın özgül yoğunluğunun 1200 kg/m^3 olduğu biliniyorsa, bu kablonun 100 metresinin kütlesini belirle.



Şekil 1

SORU 4

Bir kaşar peyniri tekeri, yarıçapı 20 cm ve yüksekliği 15 cm olan bir silindir biçimindedir. Ondan Şekil 2'deki gibi 3 parça kesilmiştir. Birinci parça 30°, ikinci parça 25° ve üçüncü parça 40°'lik merkez açılarına sahiptir. Üç parçanın her biri 1,5 mm kalınlığında eritilmiş peynirle kaplanmaktadır. Her parçayı kaplamak için kaç litre gereklidir, hesapla.



Şekil 2

ETKİNLİK

625 m^2'lik kare biçimli bir arsada 120 m^2 yüzey alanına sahip ekolojik bir ev inşa edilmiştir. Bahçede, genişliği 10 m ve uzunluğu 20 m olan dikdörtgen biçimli bir tarım alanı bulunmaktadır. Evin çatısının yarısında, Şekil 3'te gösterildiği gibi, sulamada kullanılmak üzere yağmur suyu toplama sistemi planlanmaktadır. Çatının yarısının genişliği 12 m, uzunluğu 10 m'dir.



Şekil 3

a) 1 m²'nin sulanması için yaklaşık 2 litre su harcanıyorsa, tüm bahçeyi sulamak için ne büyüklükte bir su deposu gereklidir?

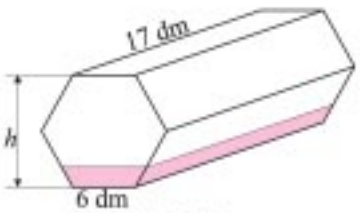
b) Depo, yarıçap ile yüksekliğin oranının 1 : 3 olduğu bir silindir biçimindeyse, onun yarıçapını ve yüksekliğini belirle.

c) İki gün yağmur yağmış ve metrekare başına 3 litre düşmüşse, depo bu iki günde dolar mı?

d) Bu iki günde tüm arsanın üzerine kaç litre yağmur yağmıştır, evin üzerine kaç litre yağmıştır?

SORU 5

Küçük parçaların nikel kaplanmasında kullanılan döner tambur, Şekil 4'teki gibi düzenli altıgen prizma biçimindedir. Çalışma sırasında yalnızca yüksekliğin h'nin altıda biri doldurulmaktadır. Tamburun dolu kısmının hacmini belirle.



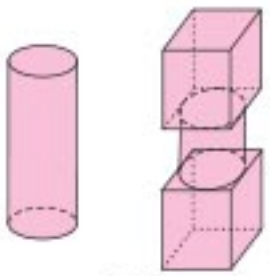
Şekil 4

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kenarları 100 m ve 60 m olan dikdörtgen biçimli bir parsel inşaata hazırlanıyor. Bu amaçla, uzunluğu 2 m ve yarıçapı 64 cm olan bir silindir (yol silindiri) ile baştan sona geçilmelidir. Silindirin parselin bir ucundan diğer ucuna hareket ederken yönünü değiştirmesine izin verilmediği bilinmektedir. Silindirin dönme frekansı 0,2 Hz ise, tüm parselin üzerinden geçmek için ne kadar süre gereklidir? Silindirin geri dönmesi için gereken süre ihmal edilmelidir.

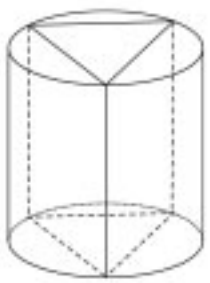
2. Yarıçapları 1 m ve 1,5 m olan beton halkalar bir kuyunun içten korunmasında kullanılmaktadır. Kuyunun derinliği 12 m'dir. Bir halkanın yüksekliği 0,4 m ise, kaç halka gereklidir? Betonun özgül yoğunluğu 2300 kg/m³ ise, halkaların kütlesini belirle.

3. Parfüm üreten ve şişeleyen bir şirket, bir ürününü değiştirmeye karar vermiştir. Parfüm daha önce silindirik bir şişede paketlenirken, şimdi Şekil 5'teki gibi, birbiriyle eş iki küpün bir dik silindirle bağlandığı biçimdeki bir şişeye doldurulacaktır. Toplam hacim 100 ml olmalıdır. Şişenin yüksekliğini belirle. Silindirlerin aynı yarıçapa sahip olduğu biliniyorsa, bu yüksekliği önceki ambalajla karşılaştır.

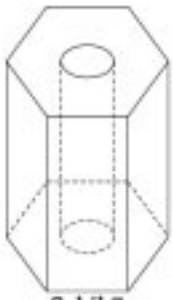

Şekil 5

4. Kapı stoperleri, tabanı dik üçgen olan üçyüzlü prizma biçimindedir; dik üçgenin dik kenarları 12 cm ve 5 cm'dir. Uzunlukları 16 cm'dir. Özgül yoğunluğu 1,6 g/cm³ olan silikondan 2,53 milyon stoper üretmek için kaç kilogram silikon gereklidir?

5. Alüminyum bir kalıp, içine düzenli üçgen prizma yazılmış bir silindirden oluşmaktadır (Şekil 6). Alüminyumun özgül yoğunluğu 2,7 g/cm³ ise, kalıbı üretmek için ne kadar kilogram alüminyum gereklidir? Kalıbın yarıçapı 30 cm ve yüksekliği 1,2 m'dir.


Şekil 6

6. Bir demir somun, Şekil 7'deki gibi, içinden çapı 0,8 cm olan bir silindir çıkarılmış düzgün altıgen prizma biçimindedir (Şekil 7). Prizmanın yüksekliği 3 cm ve taban kenarı 1 cm'dir. Demirin özgül yoğunluğu 7,874 g/cm^3 ise, 1000 somunun dökülmesi için kaç kilogram demir gereklidir?



Şekil 7

TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR

1. Dar açısı $\alpha = 45°$ olan bir ikizkenar yamukta küçük taban 12 cm, yükseklik 3 cm'dir. Yamukun alanını hesapla.
2. Çevresi 124 dm ve bir kenarı 12 dm olan bir paralelkenarda b kenarının uzunluğunu ve yüksekliklerin oranını belirle.
3. Tabanları 20 cm ve 11 cm, yan kenarları 17 cm ve 10 cm olan bir yamukun alanını hesapla.
4. a = 21 cm, b = 17 cm ve c = 10 cm kenarlarına sahip üçgende alanı, yükseklikleri, içteğet çemberin ve çevrel çemberin yarıçaplarını ve üçgenin çevresini belirle.
5. Tabanı a = 10 cm ve eş kenarı b = 13 cm olan ikizkenar üçgende alanı, yükseklikleri, içteğet çemberin ve çevrel çemberin yarıçaplarını ve üçgenin çevresini belirle.
6. Bir üçgende iki kenarın uzunlukları 27 cm ve 29 cm, üçüncü kenara çizilen kenarortunun uzunluğu 26 cm ise üçgenin alanını hesapla.
7. S, ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olsun ve ΔASC'nin alanı 36 cm^2, ΔASB'nin alanı 40 cm^2 ve ΔCSB'nin alanı 68 cm^2 olsun. İçteğet çemberinin yarıçapı 12 cm ise, üçgenin kenarlarını hesapla.
8. Bir üçgenin kenarları 13 cm, 14 cm ve 15 cm'dir. Merkezi, orta büyüklükteki kenar üzerinde bulunan ve diğer iki kenara teğet olan çemberin yarıçapını belirle.
9. Taban kenarı a = 6 cm ve yüksekliği H = 9 cm olan düzgün üçgen prizmanın hacmini hesapla.
10. Taban kenarı a = 6 cm ve yüksekliği H = 12 cm olan düzgün altıgen prizmanın hacmini hesapla.
11. Taban kenarları 5 cm ve 12 cm, yüksekliği c = 10 cm olan bir dikdörtgenler prizmasının diyagonal kesitinin alanını hesapla.
12. Bir çadır, tabanı ikizkenar üçgen olan dik prizma biçimindedir; taban 8 m ve eş kenar 5 m'dir. Çadırın tabanı hariç yan yüzey alanını belirle; çadırın uzunluğu, tabanın yüksekliğine eşittir.
13. Silindir biçimli bir metal kabın yüzey alanı $1596\,\pi$ cm^2'dir. Taban çapı 12 cm ise kabın yüksekliğini belirle.

14. Tabanı kenarları 2 cm ve 8 cm olan ve dar açısı 30° olan paralelkenar bir doğru prizma verilmiştir. Yan yüzey alanı 10 cm2'dir. Prizmanın hacmini belirle.

15. Belirli bir tür dübel, taban çapına eşit yüksekliğe sahip silindir biçimindedir. Dübelin yan yüzey alanı 104 cm kare olarak verilmiştir. Dübelin taban alanını belirle.

16. Bir doğru prizmanın tabanı bir eşkenar dörtgendir ve diyagonal kesitlerinin alanları 3 cm2 ve 4 cm2'dir. Prizmanın yan yüzey alanını belirle.

17. Bir silindirin yan yüzey alanı 80 cm2'dir. Osal kesiti (eksensel kesiti) karedir. Silindirin alanını belirle.

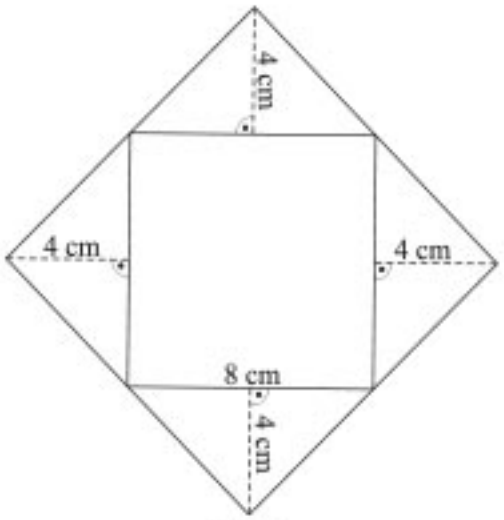
18. Yağmur suyunu boşaltma kanalı Şekil 1'deki gibi tabanları 6 m ve 4 m ve yüksekliği 1,3 m olan bir ikizkenar yamuk biçimindedir. Kanalın uzunluğu 150 m'dir. Kanala en fazla ne kadar yağmur suyu toplanabilir?

19. Bir doğru prizmanın tabanı köşegenleri 3 cm ve 4 cm olan bir eşkenar dörtgendir ve yan yüzün köşegeni 6,5 cm'dir. Prizmanın alanını ve hacmini hesapla.

20. Bir çocuk oyun alanı Şekil 1'deki gibi kare biçimindedir ve ölçüler 1:100 ölçeğindedir. Ortasına kare biçiminde yapay çim döşemeleri yerleştirilecektir.

a) Döşemeler kenarı 5 cm olan kareler biçimindeyse, ortadaki bölümü kaplamak için kaç döşeme satın alınmalıdır?

b) Kalan kısma çim ekilecektir. Bir metrekareye 30 gram tohum ekiliyorsa kaç kilogram tohuma ihtiyaç vardır?

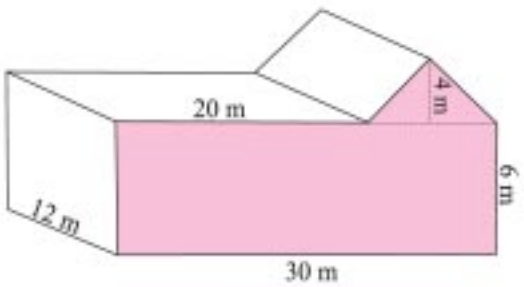


Şekil 1

21. Şekil 2'de bir bina gösterilmiştir.

a) boyalı kısmın alanını hesapla,

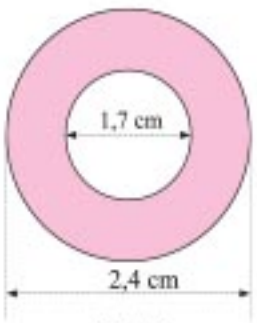
b) binanın hacmini hesapla.



Şekil 2

22. Bir su cihazı silindirik biçimdedir; yüksekliği 50 cm ve çapı 40 cm'dir. Cihazın hacmini hesapla. Bir bardak silindir biçiminde olup çapı 8 cm ve yüksekliği 10 cm'dir. Cihaz kaç bardak su içerir?

23. Metal bir nesne Şekil 3'teki gibidir. Boyalı kısmın alanını belirle. Nesnenin kalınlığı 2 mm ise, bu tür 100 000 nesnenin hacmi ne olur?



Şekil 3

24. Düzgün prizmanın tabanı kenarı 7 cm olan bir karedir ve yüksekliği 20 cm'dir. Prizmanın içine yazılabilecek ve bu sırada hacmi en büyük olan silindirin boyutlarını belirle.

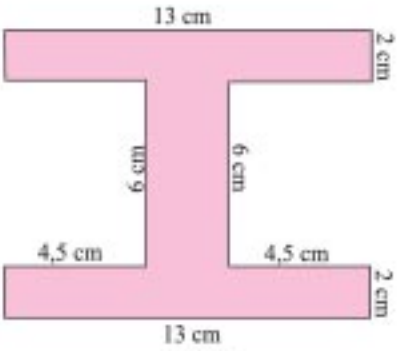
25. Uzunluğu 5 metre olan bir çelik şina, Şekil 4'teki gibi bir enine kesite sahiptir.

a) Boyalı kısmın alanını hesapla,

b) şinanın hacmini hesapla,

c) çeliğin özgül yoğunluğu 7,8 g/cm3 ise şinanın kütlesini belirle,

d) taşıma kapasitesi 8 ton olan kamyonla kaç şina taşınabilir?



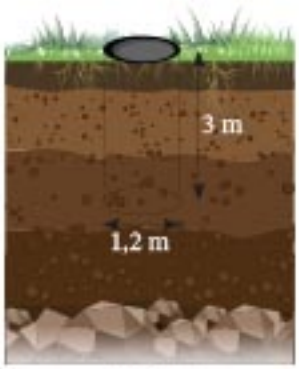
Şekil 4

26. Asan 7 metre uzunluğunda, 5 metre genişliğinde ve 2,7 metre yüksekliğinde bir garaj inşa etmeye karar vermiştir. Garajı, boyutları 25cm, 12 cm ve 6,5 cm olan dikdörtgen prizma biçimli tuğlalarla yapmak istemektedir. İnşa için yaklaşık 50 000 tuğlaya ihtiyacı olduğunu tahmin etmiştir. Bu tahminini kontrol et.

27. Şekil 1'de toprak drenajı için silindirik bir açıklık gösterilmiştir.

a) Açıklığın kapladığı hacim ne kadardır?

b) Açıklık, iç tarafından silindirik beton halkalarla kaplanacaktır. Halkaların her birinin yüksekliği 25 cm ve kalınlığı 5 cm'dir. Açıklığın kaplanması için bu türden kaç halka gereklidir? Betonun özgül yoğunluğu 2500 kg/m3 ise tüm halkaların toplam kütlesini belirle.



Resim 1

Konu 6:

VERİLERLE ÇALIŞMA

Bu konunun öğreniminde şunları yapabilecek duruma geleceksin:

1. Gerçek bağlamdan gelen problemlerin çözümünde klasik ve deneysel olasılığı uygulayabileceksin;
2. Verileri toplayıp işleyebilecek ve sonuçları gerçek bağlamda yorumlayabileceksin.

6.1. Deneysel Olasılık

SORU 1

Aşağıdaki cümleleri incele ve benzerlerini düşün:

a) Bugün büyük olasılıkla yağmur yağacak!

b) Bütün yıl boyunca sıkı çalıştım, bu yüzden pekiyi not için iyi şansım var!

c) Birinin 200 yaşında olması imkânsızdır!

d) Bir soruda iki seçenek sunulduğunda, doğru cevabı bilmesen de tutturma şansı 50 : 50'dir.

Böyle cümleler günlük konuşmada sıkça kullanılır. Her biri, deneyimimize dayanarak belirli bir öngörü içerir. Belirli bir olayın gerçekleşme şansı sayısal olarak belirlenebilir.

ÖRNEK 1

24 öğrenciden oluşan bir sınıfta aşağıdaki deney yapılmıştır. Öğrenciler ikişerli gruplara ayrılmış ve her çift, bir paranın 20 atılışında "yazı"nın kaç kez geldiğini kaydetmelidir. Bu sırada çiftten bir öğrenci deneyi yapar, diğeri not tutar. Sonra elde edilen veriler tabloya yazılır:

para atış sayısı	"yazı"nın görülme sayısı	"yazı"nın görülme sayısının toplam atış sayısına oranı
20	7	$\frac{7}{20}$

Bir sonraki adımda öğrenciler rollerini değiştirir ve atış sayısı iki katına çıkar. Tüm çiftlerden elde edilen veriler tahtaya yazılır. Daha sonra elde edilen oranlar karşılaştırılır ve deneyin gerçekleşme sayısı arttıkça bu oranların değerinin 0,5'e yaklaştığı sonucuna varılır.

ETKİNLİK

Zar kullanarak benzer bir etkinlik düzenleyin ve zarın üst yüzünde altı noktanın kaç kez geldiğini not edin. Her grup sonuçlarını tahtaya yazmalıdır. Son sütunda her grup, ikinci gruptan başlayarak, altı gelme sayısının toplam atış sayısına (kendilerinden önceki grupla birlikte) bölünmesiyle elde edilen oranı vermelidir. Sonuçlar sınıf düzeyinde tartışılır.

ÖRNEK 2

24 öğrenciden oluşan bir sınıfta, 3'er kişilik gruplar hâlinde, zar atılır ve üç sayısının kaç kez geldiği kaydedilir. Tabloda, tüm grupların zarın 20'den fazla, fakat 30'dan fazla olmayacak şekilde atılması

sırasında elde edilen sonuçları kaydedilmiştir. Sondan bir önceki sütunda her grup, üç gelme sayısının tüm atış sayısına oranını yazar; bu oran, 3 sayısının göreli sıklığı veya frekansı olarak bilinir. Sondan bir önceki sütunda, her grup, ikinciden başlayarak, üç gelme toplam sayısının (kendi grubu ile önceki grubun birlikte) iki grubun toplam atış sayısına oranını yazmalıdır. Bu sayı, 3 sayısının kümülatif sıklığı olarak adlandırılır.

Grup Numarası	Zar Atış Sayısı	Üç Gelme Sayısı	Göreli Sıklık Veya Frekans	Kümülatif Sıklık
1	20	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	$\frac{7}{20} = 0{,}35$
2	22	3	$\frac{3}{22} \approx 0{,}14$	$\frac{7+3}{20+22} = \frac{10}{42} \approx 0{,}238$
3	21	1	$\frac{1}{21} \approx 0{,}05$	$\frac{10+1}{42+21} = \frac{11}{63} \approx 0{,}175$
4	25	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	$\frac{11+6}{63+25} = \frac{17}{88} \approx 0{,}193$
5	30	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1$	$\frac{17+3}{88+30} = \frac{20}{118} \approx 0{,}169$
6	22	4	$\frac{4}{22} = 0{,}18$	$\frac{20+4}{118+22} = \frac{24}{140} \approx 0{,}171$
7	24	4	$\frac{4}{24} = 0{,}17$	$\frac{24+4}{140+24} = \frac{28}{164} \approx 0{,}171$
8	23	3	$\frac{3}{23} = 0{,}13$	$\frac{28+3}{164+23} = \frac{31}{187} \approx 0{,}166$

Önceki ve sondan bir önceki sütundaki verilere göre, oyun zarının atılma sayısı arttıkça, oran $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ değerine yaklaşır.

SORU 2

Zarın her bir nokta sayısının ortaya çıkışlarını kaydedeceğin bir tablo yapmaya çalış; önce 20 zar atışında, sonra 30 ve son olarak 40 zar atışında. Zarın her bir sayı değeri için oranlar hakkında, zarın atılma sayısına göre ne gözlemliyorsun? Tablo şöyle görünebilir:

Zar Atış Sayısı	Zarın Nokta Sayısı					
	1	2	3	4	5	6
20						
30						
40						

SORU 3

İki madeni para eşzamanlı olarak 20 atışta aşağıdaki olayları gözlemle:

a) her iki parada "yazı"nın görülme sayısı,

b) iki parada en az bir "tura"nın görülme sayısı.

Verileri bir tabloya yaz. Kümülatif sıklıkları hesapla. Elde edilen oranların hangi değere yaklaştığı üzerine düşün.

Önceki tüm örnek ve alıştırmalarda deneyler yaptık ve belirli bir olayı gözlemledik.



n deney sayısı olsun. Gözlemlediğimiz olayın gerçekleştiği deney sayısının toplam deney sayısına oranına olayın **deneysel** ya da **ampirik olasılığı** denir.

Bu değer, deney sayısına ve gözlemlenen belirli olayın gerçekleşme sayısına bağlıdır. Daha kısa yazım için şu gösterimler kullanılır: $P(A) = \frac{m}{n}$; burada A olayın adı, P(A) A'nın olasılığı, m A olayının gerçekleşme sayısı, n ise deney sayısıdır.

ÖRNEK 3

Bir madeni para 1000 kez atılmıştır. Bu sırada "tura" 547 kez gelmiştir. Bu, A olayı için "tura"nın görülme sayısının olasılığının $\frac{547}{1000} = 0{,}547$ olduğu; B olayı için "yazı"nın görülme sayısının olasılığının $\frac{453}{1000} = 0{,}453$ olduğu anlamına gelir. Açıkça bu iki olay yazı–tura atışında tek olasılıklardır ve $P(A) + P(B) = 0{,}547 + 0{,}453 = 1$.

SORU 4

İki madeni para eşzamanlı olarak 600 kez atılıyor. Şu olaylar gözleniyor: A: iki "yazı"nın görülme sayısı, B: bir "yazı"nın görülme sayısı ve C: "yazı"nın hiç görülmemesi. Aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Atış Sayısı	*A*	*B*	*C*
500	110	225	165

A, B ve C olaylarının deneysel olasılıklarını hesapla.

SORU 5

Bir yılda 240 gün için hava durumu tahmini ile ilgili günün gerçek hava durumu karşılaştırılmıştır. Tahminin 176 gün doğru olduğu belirlenmiştir. A: hava tahmininin doğru olması ve B: hava tahmininin doğru olmaması olaylarının deneysel olasılıklarını belirle ve elde edilen değerleri yüzde olarak yaz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir otomobil lastiği üreticisi, lastiklerin kaç kilometre sonra değiştirilmesi gerektiğine dair kayıt tuttuğu bir tabloya sahiptir. 1000 otomobil için aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Kilometre Cinsinden Mesafe	4000'e kadar	4000 ile 8000 arasında	8000 ile 12 000 arasında	12 000'in üzerinde
Otomobil Sayısı	215	235	297	253

Bu şirkete ait satın alınan otomobil lastiklerinin aşağıdaki mesafelerden sonra değiştirilmesi gerektiğine dair deneysel olasılığı, yüzde olarak belirle:

A: 4000 kilometreden az,

B: 4000 kilometreden fazla ancak 12 000 kilometreden az,

C: 12 000 kilometreden fazla.

2. Bir yarıyılda matematikten 6 yazılı yoklama yapılmıştır ve Jana'nın kazanılan puan yüzdesi aşağıdaki tabloda verilmiştir:

yazılı yoklama numarası	1	2	3	4	5	6
kazanılan puan yüzdesi (%)	73	69	67	81	68	62

Rastgele seçilen bir yazılı yoklamada Yana'nın %70'ten fazla puan alma olasılığının deneysel değerini belirle.

3. Yılın bir döneminde güneşli gün sayısına ilişkin analiz aşağıdaki gibidir:

Ay	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos
Güneşli Gün Sayısı	19	22	24	20

Bu dönemden rastgele seçilen bir günün güneşli olmasının deneysel olasılığı ne kadardır?

4. Net kütlesi 900 gram olarak öngörülen şeker paketlerine yönelik denetimde, 50 ürün için aşağıdaki bulgular elde edilmiştir:

Kütle (Gram)	880-890	890-900	900-910	910-920
Paket Sayısı	19	15	13	3

Rastgele seçilen bir paketin kütlesinin 900 gramdan büyük olmasının deneysel olasılığı ne kadardır?

5. Ocak ayında ülkedeki birkaç büyük şehir için SO_2 (kükürt dioksit) konsantrasyonlarını $\mu g/m^3$ cinsinden bul ve bir tablo düzenle. Rastgele seçilen bir şehrin kükürt dioksit konsantrasyonunun 125 $\mu g/m^3$'ü aşma olasılığının ne kadar olduğunu belirle.

ARAŞTIRMA

Üç madeni para al ve aynı anda 40 atış yap. Her atıştan sonra "yazı"nın görülmelerini kaydet:

a) paraların hiçbirinde, b) yalnızca birinde,

c) tam olarak ikisinde, d) üçünde de.

Sonra göreli sıklığı hesapla. Bir çıkarım yapabiliyor musun?

Atış sayısı 10 artırılırsa hangi sonuçlara ulaşırsın?

6.2. Klasik Olasılık

SORU 1

Şu sorular üzerinde düşün ve yanıtla:

a) Bir madeni paranın 10 000 kez atıldığını varsayarsan, bunların kaçında "tura" gelmesini beklersin?

b) Bir zar 100 000 kez atılırsa, bunların kaçında iki gelmesini beklersin?

Birçok deney, madeni para ya da oyun zarı atma gibi, çok sayıda kez tekrarlanabilir. Diğerleri ise maliyetli ya da sık sık gerçekleşmesi imkânsızdır; örneğin bir uzay aracını daha iyi verim için gerekli bazı özel parametreler bakımından denemek gibi. Bir nesnenin şiddetli rüzgârlar veya belirli büyüklükte bir deprem etkisindeki dayanıklılığını test etmek ya da yıkıp tahribat etkisini ölçmek her zaman mümkün değildir. Bu nedenle, bir deneyde her bir gerçekleşmenin eş olasılıklı olduğunu varsayarsak, olasılığı başka bir yoldan tanımlarız.



Klasik ya da **teorik olasılık**, A olayının tüm elverişli gerçekleşme sayısının, deneydeki tüm olası gerçekleşme sayısına oranıdır; burada deneydeki tüm gerçekleşmelerin eş olasılıklı olduğu varsayılır.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Bundan sonra "olasılık" denildiğinde klasik olasılık anlaşılacaktır.

ÖRNEK 1

Bir madeni para yalnız bir kez atılıyor. İki yüzün de eş şansa sahip olduğu varsayımıyla, "yazı" gelmesi olayı $\frac{1}{2}$, yani %50 olasılığa sahiptir. Benzer şekilde "tura" gelmesi olayının olasılığı da %50'dir.

SORU 2

Bir zar yalnız bir kez atılıyor. Aşağıdakilerin olma olasılığı kaçtır: a) altı gelmesi, b) dört gelmesi?

ÖRNEK 2

Bir kapta üç bilye vardır: kırmızı, sarı ve mavi. İlir, bakmadan bir bilye çekiyor.

Bu bilyenin mavi olma olasılığı $\frac{1}{3}$ tür; çünkü tüm bilyelerin çekilme şansı eşittir ve yalnızca biri mavidir. Benzer biçimde, bu bilyenin kırmızı ya da sarı olma olasılığı da yine $\frac{1}{3}$ tür. Başka bir deyişle, üç bilyenin her birinin kap'tan çekilme şansı yaklaşık %33,33'tür.

"yazı geldi", "tura geldi", "üç geldi", "altı geldi" vb. olaylara **temel (basit) olaylar** denir.

SORU 3

Bir oyun zarı bir kez atılıyor. Aşağıdaki olayların olasılığı kaçtır:

a) 4'ten küçük bir sayı gelmesi,

b) 4'ten küçük olmayan bir sayı gelmesi?

Sonra düşün: Bu iki olaya temel (basit) olay denir mi? Olayları başka sözlerle ifade etmeye çalış ve oyun zarı atıldığında tüm gerçekleşmeleri bunların kapsayıp kapsamadığını belirle.



A olayı dışında kalan tüm gerçekleşmeleri içeren olaya A'nın **karşıt olayı** denir. Bu olayı $\overline{A}$ ile göstereceğiz.

Onun olasılığı $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$'dir.

ÖRNEK 3

Bir oyun zarı bir kez atılıyor. Aşağıdaki olayların olasılığı kaçtır:

a) 8 sayısının gelmesi,

b) 6'dan büyük olmayan (yani 6'ya eşit ya da küçük) bir sayının gelmesi?

8 sayısının gelmesi için elverişli gerçekleşme sayısı 0'dır; çünkü zarın altı yüzü vardır ve 1, 2, 3, 4, 5 ya da 6 gelebilir. Bu olayın olasılığı 0'dır. Bu, **imkânsız bir olaydır**. 6'dan büyük olmayan bir sayının gelmesi, yani 6'ya eşit ya da küçük olması için elverişli gerçekleşme sayısı 6'dır ve bu sayı, tüm olası gerçekleşmelerin sayısına eşittir. Bu olayın olasılığı 1'dir. Bu, **kesin** (kesinlikle gerçekleşen) bir **olaydır**.



Her olay A için $0 \leq P(A) \leq 1$ geçerlidir.

SORU 4

Oyun kâğıdı destesinin 52 kâğıdı vardır; bunlar 4 gruba (♣, ♦, ♥ ve ♠) ayrılır ve her grupta 13 kâğıt bulunur. Desteden bir kâğıt çekilmiştir. Aşağıdaki olayların olasılığı nedir:

a) çekilen kâğıdın kırmızı olması,

b) çekilenin onlu olması,

d) çekilenin siyah "kız" olması,

e) çekilenin "kupa ası" olması,

f) çekilen kâğıdın "resimli" olmaması, yani "vale", "kız" ya da "papaz" olmaması.

SORU 5

Bir kapta 4 kırmızı, 6 yeşil ve 10 mavi bilye vardır. Kaptan bir bilye çekilmiştir. Çekilen bilyenin olasılığı:

a) mavi olmaması,

b) ne kırmızı ne de yeşil olmaması,

c) yeşil ya da mavi olması.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. İki arkadaşın (aynı yıl olmak zorunda değil) doğum günlerinin:
   a) aynı tarihte olma,
   b) farklı tarihlerde olma olasılığı nedir (yılın 365 gün olduğu kabul edilirse)?
2. Bir sınıfta 28 öğrenci vardır: 18 kız ve 10 erkek. Günlükteki sıra numaraları kâğıtlara yazılmış, kâğıtlar saydam olmayan bir kaba konmuştur ve öğretmen kaptan bir kâğıt çekmektedir.
   a) Çekilen kâğıdın sınıftaki bir kızın numarası olma olasılığı nedir?
   b) Çekilen kâğıdın sınıftaki bir erkeğin numarası olma olasılığı nedir?
3. Bir kutuya 7 mavi, 4 yeşil ve 6 kırmızı bilye konmuştur. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:
   a) bir mavi bilye çekilmesi, b) bir yeşil bilye çekilmesi,
   c) bir kırmızı bilye çekilmesi.
4. Viktor iki madeni parayı aynı anda atıyor. En az bir "tura" gelmesi olayının olasılığı nedir?
5. Bir kaba 3'ün bölenleri olan ve 37'den büyük olmayan tüm doğal sayılar yazılı kâğıtlar konmuştur. Kaptan bir kâğıt çekilmiştir. Bu kâğıttaki sayının çift olma olasılığı nedir?

ARAŞTIRMA

Bir kaba 1'den 9'a kadar rakamlar ve 0 yazılı 10 kâğıt konmuştur. Kaptan, geri koymadan, art arda 5 kâğıt çekilmektedir. Çekilen 5 kâğıdın hepsinde tek rakamların bulunması olasılığı nedir?

6.3. Verilerin Toplanması

SORU 1

Sınıf arkadaşlarının öğrenmeye ne kadar zaman ayırdıklarını, sosyal platformlarda kaç saat geçirdiklerini, masa oyunları oynamaya kaç saat ayırdıklarını ve bilgisayar oyunu oynayarak ne kadar zaman geçirdiklerini kontrol etmelisin. Sınıfında 34 öğrenci varsa bu bilgilere en hızlı nasıl ulaşabileceğini düşün. Birinci sınıftaki tüm sınıflardan verileri aynı şekilde mi toplayacaksın? Peki, yaklaşık 1000 öğrencisi olan tüm okuldan verilerin toplanması gerekirse ne olacak?



Bir araştırma için verilerin toplanması, **veri toplama aracı** yardımıyla gerçekleştirilir. Böyle araçlar; anketler, soru formları, kontrol listeleri vb. dir.

ÖRNEK 1

Bir okulda, birinci sınıftaki tüm öğrencilerin fiziksel kondisyonlarının ne durumda olduğunu kontrol etmek istemişlerdir. Bu nedenle 30 metre koşuda erkeklerin daha iyi sonuçlara sahip olup olmadığını, uzun atlamada mesafe farkı bulunup bulunmadığını, vücudu kaldırma egzersizlerini erkeklerin mi yoksa kızların mı daha iyi yaptığını ve öğrencilerin duruşlarının nasıl olduğunu kontrol etmeye karar verilmiştir.

Birinci sınıfta okuyan tüm öğrenciler 150 kişidir ve hepsinin test edilmesi pratik değildir. Bu nedenle 30 öğrenci rastgele seçilmiş ve her birinin cinsiyeti, metre cinsinden uzun atlama mesafesi, saniye cinsinden 30 metre koşu süresi, 1 dakikadaki vücudu kaldırma egzersizi sayısı kaydedilmiş; duruşu ise kötü, iyi veya çok iyi olarak değerlendirilmiştir. Bu şekilde bu 30 öğrenciye ilişkin veriler toplanmış ve bunların hepsi birinci sınıf öğrencilerinin tüm popülasyonunu temsil etmektedir.



Nüfusun, seçilme şansları eşit olan birimlerden oluşan kısmına **rastgele örneklem** denir. İncelenen özelliğe **istatistik veri** veya **istatistik değişken** denir.

İstatistik veriler veya istatistik değişkenler **betimleyici** ya da nitel (örneğin duruş), ve **sayısal** ya da nicel (örneğin 30 metre koşu süresi saniye cinsinden) olabilir.

SORU 2

Sınıf arkadaşların arasında hangi araştırmayı yürütebileceğini düşün. Bir soru formu hazırla, bir örneklem seç ve araştırmayı gerçekleştir.

ÖRNEK 2

Maya, sınıf arkadaşlarının hangi takım sporlarına katılmak istediklerini düşünüyor: futbol, basketbol, voleybol veya hentbol. Takım sporlarını bir kâğıda yazmış, sonra her sporun yanına alınan yanıtlara göre birer çizik koymuş ve aşağıdakini elde etmiş:

futbol 𝍸 𝍸 𝍸
basketbol 𝍸 𝍸
voleybol 𝍸
hentbol ||

Bu şekilde Maya bir soru formu hazırlamış ve her yanıtın frekansına ya da sıklığına göre, sınıf arkadaşlarının en çok katılmak istedikleri takım sporunun futbol olduğunu keşfetmiştir.

SORU 3

Okulda öğrencilerin kendilerini iyi hissedip hissetmediklerini araştırmak için, okulda birinci sınıftan dördüncü sınıfa kadar 1200 öğrenci varken, sadece birinci sınıftan 30 öğrencilik bir örneklem almak yeterli midir? Yanıtını gerekçelendir!

ÖRNEK 3

Almir, sınıfında arkadaşlarının nefeslerini kaç saniye tutabildikleri konusunda bir anket yapmıştır. Süreyi ölçmüş ve her bir sınıf arkadaşının saniye cinsinden değerini kaydetmiştir:

11 17 21 35 24 14
18 22 33 42 23 19
14 24 17 12 13 18
19 22 21 24 14 17

O, öğrencilerden kaçının nefesini en uzun süre tutabildiğini bilmek istiyor. Daha çok sayıda öğrenci 20 saniyeden daha uzun süre nefesini tutabiliyor mu? Kaçı 30 saniyeden daha uzun süre nefesini tutabiliyor?

Açıkça görülüyor ki bu şekilde toplanan veriler zor analiz edilir, bu yüzden bazı daha özel özelliklere göre gruplanmaları daha iyidir. Örneğin, şu şekilde bir dağılımı ele alabiliriz:

Saniye Sayısı	Frekans
10-20	13
21-30	8
31-40	2
41-50	1

Buradan, sorulan sorulara kolaylıkla yanıt verilebilir.

Bu şekilde veriler, frekanslara göre gruplanır; yani gruplanmış frekans tablosu ile sunulurlar.

SORU 4

Bir grupta yer alan 50 turistten, 8'i 70 yaşından büyüktür, 15'i 50 ile 70 yaş arasındadır, 10'u 30 ile 50 yaş arasındadır, 14'ü ise 10 ile 30 yaş arasındadır. Verileri bir tabloda göstermeye çalış.
Yaş aralıklarının birbirini örtmemesine dikkat et. Grupta en fazla 10 yaşında olan turist var mıdır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Diyana ve Orhan, sınıf arkadaşlarının kan grupları için bir soru formu hazırlamışlardır. Sınıf 30 öğrenciden oluşmakta olup aşağıdaki veriler toplanmıştır:

   A B AB A O O
   AB A O B A AB
   A A O A AB O
   AB A A O A O
   B O AB AB A A

   Frekans tablosu oluştur ve göreli sıklığı belirle. Sınıfta en yaygın kan grubu hangisidir? En seyrek hangisidir?

2. Bir sınıftaki öğrencilerin boyları, cm cinsinden, aşağıdaki gibidir: 159, 138, 142, 163, 142, 142, 146, 148, 139, 141, 142, 156, 156, 139, 143, 166, 143, 158, 141, 142, 151, 142, 162, 142, 162, 148, 162, 138, 142, 136, 159.
   Aşağıdaki gibi bir gruplanmış frekans tablosu oluştur:

Boy (cm)	frekans
130-140	
141-150	
151-160	
161-170	

   Ardından göreli sıklığı yüzde olarak belirle ve şu soruları çöz:

   a) Öğrencilerin yüzde kaçı 160 cm'den uzundur?

   b) Boyu 140 cm'den büyük bir öğrencinin seçilme olasılığı nedir?

   c) Sınıftan bir öğrenci seçilmiştir. Boyunun 150 cm'den uzun, ancak 161 cm'den uzun olmama olasılığı nedir?

3. Matematik testinde elde edilen puanlar şunlardır:
   85, 14, 87, 96, 45, 32, 45, 24, 15, 4, 65, 75, 74, 52, 57, 55, 32, 14, 13, 99, 100, 12, 37, 3, 37, 44, 55, 61, 25, 14, 74, 73, 8, 23, 24, 14, 25, 24, 52, 57, 12, 18, 17, 22, 88, 65, 32, 59, 85, 14, 17, 9, 33, 37. Aşağıdaki gibi bir gruplanmış frekans tablosu oluştur:

Puan	Frekans
0-10	
11-20	
21-30	
31-40	
41-50	
51-60	
61-70	
70 üzeri	

   Ardından göreli sıklığı belirle ve şu soruları yanıtla:

   a) Kaç öğrenci 41 puandan az almıştır?

   b) 31–50 puan aralığında (51'den az fakat 30'dan fazla) puan alan öğrencilerin sayısı, 61–70 puan aralığında (60'tan fazla fakat 71'den az) puan alan öğrencilerin sayısından fazla mıdır?

c) Puanı 70'ten fazla olanlar koşulu altında, iki ödev yazmaktan kaç öğrenci muaf tutulur?

d) Puanı 21'den az olanlar koşulu altında, kaç öğrenciye ek görevler için yönerge verilecektir?

4. Sokağındaki belirli bir noktadan bir saat boyunca geçen otomobillerin rengini not et. Toplanan veriler için bir frekans tablosu oluştur. Ardından aşağıdaki soruları yanıtla:

   a) Kırmızı renkli otomobillerin göreli sıklığı ne kadardır?

   b) Siyah otomobiller ne kadar sıktır?

   c) Bu zaman aralığında kaç adet yeşil renkli otomobil geçti?

5. Geçen ayın her günü için derse gelmeyen öğrencilerin sayısını bul. Toplanan verileri bir frekans tablosunda göster. Sonra şunları belirle:

   a) Derse 5'ten fazla devamsızlığı olan kaç öğrenci vardır?

   b) Derse 3'ten az devamsızlığı olan kaç öğrenci vardır?

   c) Hiç devamsızlığı olmayan öğrenciler var mıdır?

   d) Devamsızlık sayısı 10'dan büyük olanların ek derse katılması gerekiyorsa, kaç öğrenci böyle bir derse sahip olacaktır?

ARAŞTIRMA

Büyük spor etkinliklerinin televizyon yayınları sırasında atıştırmalık tüketimine ilişkin verileri 3 aylık bir dönem için topla. Farklı atıştırmalık türlerinin sıklığını incele ve verileri bir frekans tablosu ile göster.

6.4. Verilerin Grafiksel Olarak Gösterilmesi

Daha anlaşılır olması için toplanan veriler çoğu zaman grafiksel olarak, **frekans diyagramı** ile gösterilir. Diyagram, gözlemlediğimiz, ölçtüğümüz, saydığımız vb. şeylerin anlaşılır ve açık olmasını sağlayan bir veri sunum biçimidir. Diyagram çizerken, basit ve açık olması amacıyla çizgiler, geometrik şekiller, resimler kullanılır; çünkü en önemlisi, verilerin anlaşılır olması ve onlardan çıkarılan sonuçların kolayca görülebilir olmasıdır.

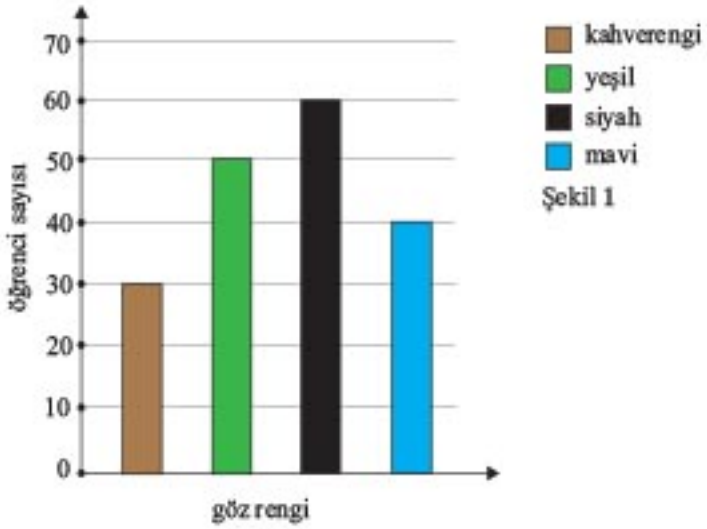
Sütun Diyagramı

Sütun diyagramında, yatay doğrunun sol yanında bir düşey doğru bulunur. Yatay doğrunun altına genellikle araştırdığımız sorunla ilgili başlık (okul, beslenme, su tüketimi, notlar vb.) yazılır. Düşey doğru boyunca, verilerin kategorilere göre büyüklüğünü ifade eden birim ölçü belirtilir. Çoğu zaman,

sütun diyagramında tabanı yatay doğru üzerinde bulunan, tabanları aynı olan dikdörtgenler kullanılır. Her bir dikdörtgenin, yani sütunun, yüksekliği temsil ettiği veri sayısına bağlıdır. Bu yöntem çoğunlukla, belirli bir aralıktaki gerçek sayılardan oluşan, fakat o aralıktaki tüm sayıları içermeyen veriler için kullanılır. Bu durumda verilerin **ayrık (kesikli) tipte** olduğu söylenir.

ÖRNEK 1

Şekil 1'de, bir okulda 180 öğrencinin göz rengi verileri sütun diyagramıyla gösterilmiştir. Diyagramdan, örneğin, 60 öğrencinin siyah gözlü olduğunu; mavi ve yeşil gözlülerin toplamının 90 olduğunu, yani tüm öğrencilerin %50'sini oluşturduğunu okuruz.



Şekil 1

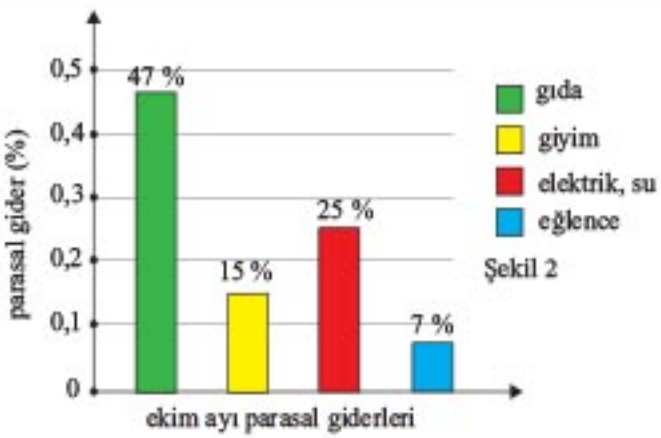
Bu örnekte veriler önce sıklıklarına göre gruplandırılmış, ardından sütun diyagramıyla temsil edilmiştir.

SORU 1

Örnek 1'deki diyagramdaki verileri tabloya gir.

ÖRNEK 2

Şekil 2'de, bir ailenin ekim ayındaki kazancını nasıl dağıttığı sütun diyagramıyla gösterilmiştir. Ailenin toplam kazancının %47'sini gıdaya, %15'ini giyime, %25'ini elektrik ve suya, %7'sini eğlenceye harcadığı görülür. Sütun diyagramına göre ekim ayında kazancın en büyük kısmı gıdaya, en küçük kısmı ise eğlenceye harcanmıştır.



Şekil 2

SORU 2

Örnek 2'deki ailenin ekim ayı için birikimi var mıdır?

SORU 3

Bir kitapçıda bir hafta boyunca en çok satılan 4 kitabın sayısı tabloda verilmiştir. Tablo verilerini, 10 satılan kitabı temsil etmek üzere 1 cm alarak sütun diyagramıyla göster.

	Satılan kitap sayısı
Kitap 1	66
Kitap 2	52
Kitap 3	38
Kitap 4	24

SORU 4

Tabloda her bir öğrencinin ayrı ayrı, matematikten yapılan 3 testten aldığı toplam puan verilmiştir. Her testte alınabilecek azami puan 100'dür.

a) Tabloyu tamamla.

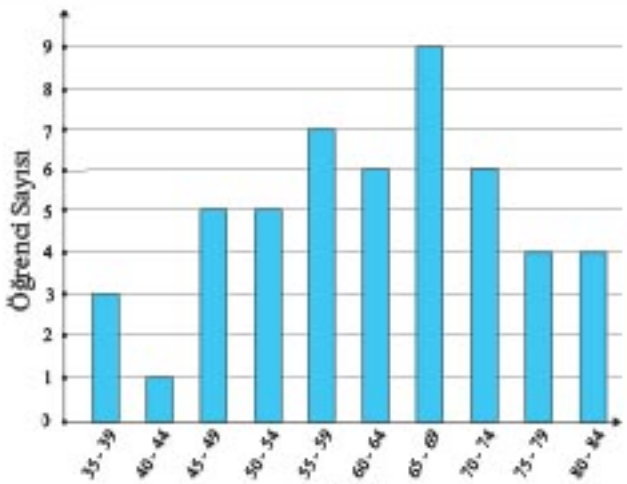
b) Tablodaki verileri, yüzde olarak, sütun diyagramıyla göster.

öğrenci	puan	%
Mile	180	
İmer	140	
Sabrina	280	
Sofiya	260	

ÖRNEK 3

Matematik testinde 50 öğrencinin aldığı puanlar şunlardır: 35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.

Bu durumda frekans tablosu çok uzun olacağından, verilerin frekanslara göre aralıklarda gruplandırılması ve sonra bu şekilde gruplandırılmış verilerin **gruplandırılmış frekans diyagramında** gösterilmesi daha kullanışlıdır. Gruplandırma çoğunlukla en büyük veri 84 ile en küçük veri 35'in farkı eşit parçalara bölündüğünde yapılır. Bu durumda fark 49'dur; dolayısıyla 5 uzunluklu 10 grup alırsak bir gruplandırma yolu elde edilir (Şekil 3).



Şekil 3

Öğrenci Sayısı	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84
Puanlar	3	1	5	5	7	6	9	6	4	4

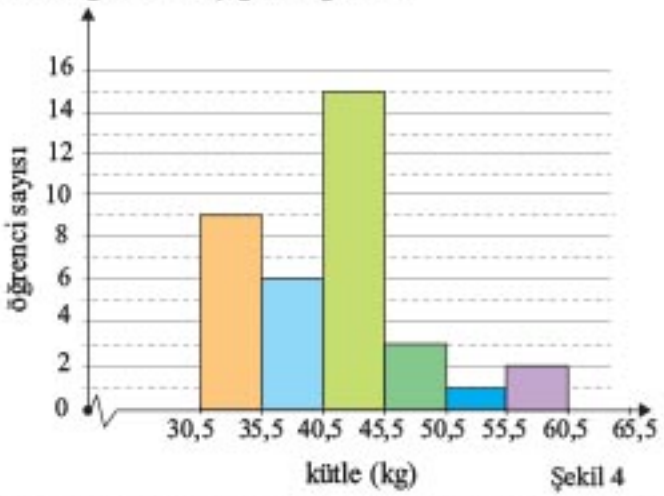
Histogram

ÖRNEK 4

Bir sınıfta öğrencilerin kütleleri ölçülmüş ve aşağıdaki gruplandırılmış frekans tablosu oluşturulmuştur:

Kütle (Kg)	Öğrenci Sayısı
30,5-35,5	9
35,5-40,5	6
40,5-45,5	15
45,5-50,5	3
50,5-55,5	1
55,5-60,5	2

Grafik gösterim aşağıdaki gibidir:



Şekil 4

Buna göre, x-ekseninde 5 kg'lik kütleyi 1 cm olarak, y-ekseninde ise değerlerin 1'den 15'e kadar değiştiğini dikkate alarak öğrenci sayısını gösteriyoruz (Şekil 4). İlk aralığın 0'dan başlamadığını vurgulamak için işaret kullanılır.

Aynı genişlikte, bitişik dikdörtgenlerden oluşan grafik gösterime eşit **aralıklı histogram** denir. Burada dikdörtgenlerin alanı, verilerin frekansıyla doğru orantılıdır. Bu gösterim biçimi, veriler bir aralıktaki tüm gerçek sayılar olduğunda kullanılır. Verilerin süreksiz değil, **sürekli(aralıksız) tipte** olduğunu söyleriz.

ÖRNEK 5

Bir öğretmen, matematikten yapılan son testte (en çok 100 puan alınabilir) öğrencilerinin performansını analiz etmek istiyor. Özellikle 20 puanın altında ve 70 puanın üstünde puan alan öğrenciler ilgisini çekmektedir.
Üç sınıftaki öğrencileri aşağıdaki şekilde gruplandırmıştır:

Puan Sayısı	Öğrenci Sayısı
0-20	7
20-30	10
30-40	10
40-50	20
50-60	20
60-70	15
70'ten fazla	8

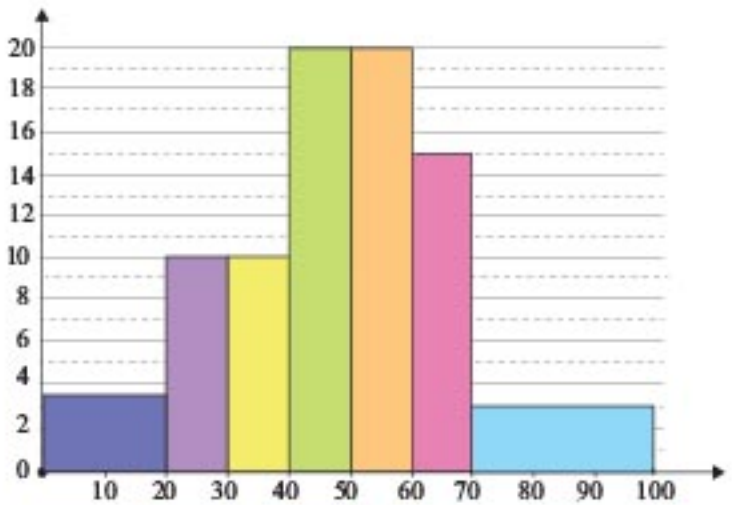
Dikdörtgenlerin alanının frekansla doğru orantılı olması gerektiğinden, aşağıdaki adımlarla uygun bir uyarlama yapılmalıdır:

1. En küçük genişliğe sahip aralık seçilir; bu durumda genişlik 10'dur.
2. Her bir dikdörtgenin uzunluğu 10 ile orantılıdır.

Buna göre elde edil:

Puan Sayısı	Öğrenci Sayısı	Sınıf Genişliği	Dikdörtgenin Uzunluğu
0-20	7	20	$\frac{7}{20} \cdot 10 = 3{,}5$
20-30	10	10	$\frac{10}{10} \cdot 10 = 10$
30-40	10	10	$\frac{10}{10} \cdot 10 = 10$
40-50	20	10	$\frac{20}{10} \cdot 10 = 20$
50-60	20	10	$\frac{20}{10} \cdot 10 = 20$
60-70	15	10	$\frac{15}{10} \cdot 10 = 15$
70'ten fazla	8	30	$\frac{8}{30} \cdot 10 \approx 2{,}67$

Verilerin grafik gösterimi şekil 5'te gösterilmiştir.



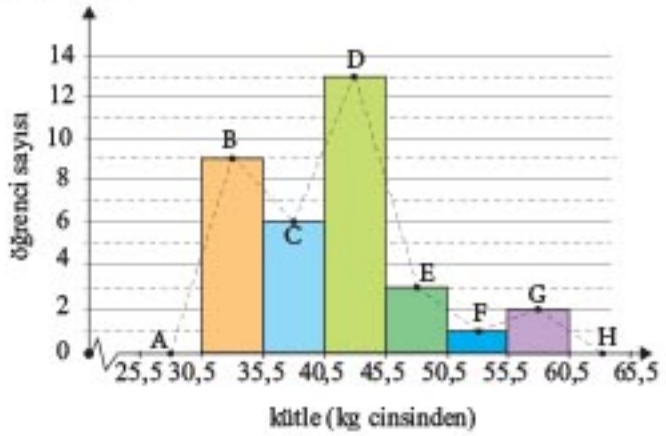
Şekil 5

Açıktır ki dikdörtgenlerin genişliği farklıdır ve uzunlukları 10 ile doğru orantılıdır; bu durum düşey eksende vurgulanmıştır. Bu gösterime eşit olmayan aralıklı histogram denir.

Frekans Poligonu

4. örnekteki histogramı alır, sonra her dikdörtgenin genişliğinin orta noktasını belirleyip bunları B, C, D, E, F ve G ile işaretlersek, BCDEFG kırık çizgisi elde edilir. Yatay eksenin bir bölümüyle birlikte bir çokgen elde etmemiz gerektiğinden, yatay eksenin sol ve sağında aynı genişlikte

aralıklar alırız. Bu aralıkların orta noktaları sırasıyla A ve N noktalarıdır. Bu şekilde ABCDEFGN kırık çizgisi elde edilir. Alanlarla çalıştığımızdan, bu aralıkların "eklenmesiyle" üçgenlerin eşliği nedeniyle alanın aynı kaldığı açıktır. Bu yolla (şekil 6) **frekans poligonu** denilen grafik gösterim elde edilir.



Şekil 6

SORU 5

Matematik testinde en fazla 100 puan üzerinden, iki sınıfta aşağıdaki veriler elde edilmiştir. Bunları frekans poligonu ile grafik olarak göster.

Not: Grafik gösterim, önce histogram çizmeden de doğrudan yapılabilir. Bunun için her aralığın orta noktası belirlenmelidir. Çoğu zaman bu, aralığın sol ve sağ sınırlarının yarı toplamıdır.

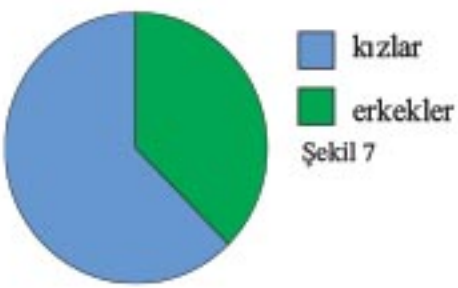
Puan	Öğrenci Sayısı	Puan	Öğrenci Sayısı
0-10	5	50-60	3
10-20	10	60-70	2
20-30	4	70-80	2
30-40	6	80-90	3
40-50	7	90-100	9

Dairesel Diyagram

Verileri sunmak için, çoğu zaman bir daire ve dairenin parçalarını kullanabilirsin. Böyle bir diyagram **dairesel diyagram** veya **sektör diyagramı** olarak adlandırılır. Bu, genellikle verileri düzenlerken incelenen kategorilerin sayısı çok büyük olmadığında kullanılır.

ÖRNEK 6

Bir sınıfta 36 öğrenci vardır, 15'i kız ve 21'i erkektir. İki kategori vardır: erkekler ve kızlar. Dolayısıyla dairesel diyagram iki parçaya (sektöre) ayrılacaktır. Her bir parçanın büyüklüğünü belirlemek için, önce bir öğrenciyi temsil eden parçanın açısı belirlenir. Bu açı $360° : 36 = 10°$ olduğundan, dairesel diyagramdaki parçalar aşağıdaki açılara sahip olacaktır:



Şekil 7

- kızlar için: $10° \cdot 15 = 150°$
- erkekler için: $10° \cdot 21 = 210°$.

Veriler frekansa göre gruplanmış, ardından grafiksel olarak sunulmuştur (Şekil 7).

SORU 6

Bir televizyon kanalının programındaki yayınların yüzdesel dağılımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	%	Açı
Müzik	30	
Reklamlar	20	
Haberler	6	
Filmler	40	
Spor	4	

Tabloyu tamamla ve buradaki veriler için bir dairesel diyagram çiz. Ardından programın ne kadarlık kısmı haberlerdir, ne kadarlık kısmı reklamlardır? Programın kaç yüzdesi eğitime ve bilime ayrılmıştır?

SORU 7

Simona'nın Nisan ayı para dağılımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Denar	%	Açı
Kira	1800		
Gıda	6000		
Ulaşım	950		
Diğer	1000		
Tasarruf	250		

Tabloyu tamamla ve veriler için bir dairesel diyagram çiz. Dairesel diyagramın sektörlerini, çemberin parçaları olarak başka nasıl belirleyebileceğini düşün.

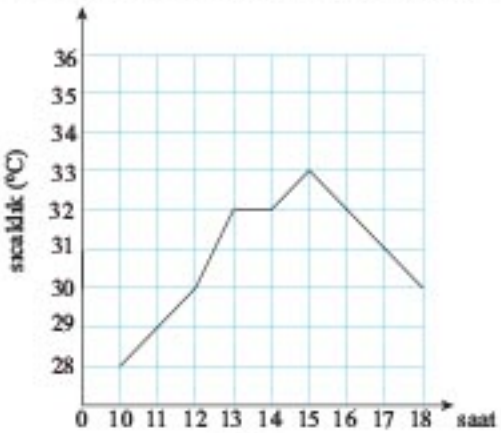
Çizgi Diyagramı

ÖRNEK 7

Jana, saat 10 ile 18 arasında hava sıcaklığını ölçmüş ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

saat	10	11	12	13	14	15	16	17	18
sıcaklık (°C)	28	29	30	32	32	33	32	31	30

Bu ölçümler daha sonra Şekil 8'de gösterilmiştir.

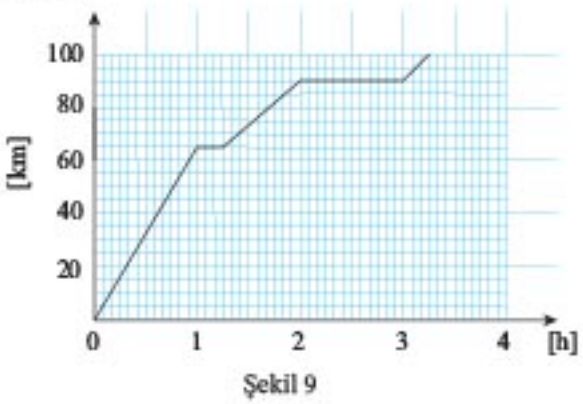


Şekil 8

Verilerin gösteriminde koordinat sistemi kullanılıyorsa, o zaman bir **çizgi diyagramı** elde ederiz.

ÖRNEK 8

Toni Üsküp'ten Kırçova'ya seyahat etmiş ve yolculuğu Şekil 9'daki çizgi diyagramında gösterilmiştir.
Şekil 9



Şekil 9

Diyagramdan şunları okuyabiliriz:

a) Yolculuğun ilk saatinde kat edilen mesafe 65 km'dir,

b) ikinci saatte kat edilen mesafe 25 km'dir,

c) toplam kat edilen mesafe 100 km'dir,

d) toplam yolculuk süresi 3 saat 15 dakikadır.

SORU 8

Bir çikolatanın fiyatı 20 denardır. Aşağıdaki tabloya göre fiyatın çikolata sayısına bağlılığını çizgi diyagramı ile göster:

Çikolata Sayısı	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Fiyat	100	200	300	400	500	600	700	800	900

Piktogram

ÖRNEK 9

Semra evinde bulunan meyveleri aşağıdaki şekilde sağda gösterildiği gibi kaydetmiştir:

Bu sırada, sayısal değerlerin resimlerle temsil edildiği, verilerin gösterimi için bir grafik türü olan **piktogramı** kullanmıştır. Bu, bazen verilerin gösterimini daha ilginç ve anlaşılması daha kolay hâle getirir. Bu şekilde piktogram ile her bir meyveden kaç adet olduğu gösterilmiştir.

meyve	sayı
elma	3
limon	4
portakal	6
muz	2
armut	4

ÖRNEK 10

Eva Nisan ayında güneşli günleri saymış ve bunları piktogramla göstermiştir:

Lejand: ☀ ile 2 güneşli gün gösterilmiştir.

Demek ki 11'den 20 Nisan'a kadar 6 güneşli gün olmuş, Nisan ayında toplam 13 güneşli gün olmuştur.

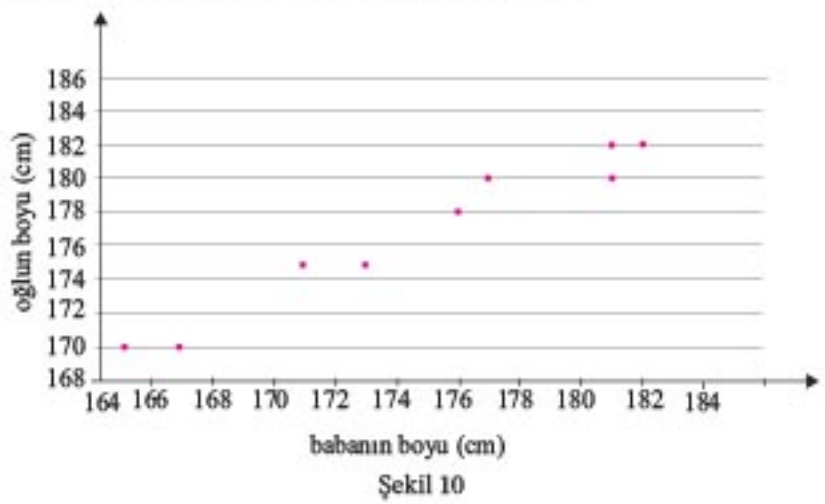
Çoğu zaman piktogramın altında, belirli bir resmin kaç birime karşılık geldiğini gösteren bir lejand verilir.

tarih	güneşli günler
1'den 10'a	☀☀☀½
11'den 20'ye	☀☀☀
21'den 30'a	☀

Nokta diyagramları

ÖRNEK 11

Grafik gösterimde (Şekil 10) baba ve oğlun boyları, koordinat sisteminde noktalar olarak temsil edilmiştir. Buna göre, babanın boyu santimetre cinsinden x koordinatı, oğlun boyu santimetre cinsinden y koordinatı olarak alınmış ve bu şekilde noktalar elde edilmiştir:



Şekil 10

Bu diyagramdan, daha uzun boylu babaların daha uzun boylu oğullara sahip olduğu kolayca görülebilir.

SORU 9

Aşağıdaki tabloda, Üsküp'te bazı yıllar için Nisan ayındaki en yüksek günlük sıcaklık ve bağıl nem verilmiştir.

Yıl	En Yüksek Günlük Sıcaklık	Bağıl Nem
2021	19 °C	69 %
2022	18 °C	67 %
2023	20 °C	65 %
2024	21 °C	55 %
2025	22 °C	60 %

Verileri nokta diyagramı ile göster ve günlük sıcaklığın artmasıyla bağıl nemin azalıp azalmadığını kontrol et. Bu iddianın her yerde geçerli olup olmadığını düşün.

ARAŞTIRMA

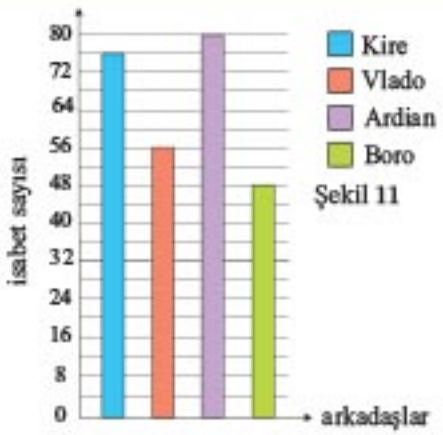
Ek'te, bir okuldan 30 öğrenciden toplanmış verilerin bulunduğu bir tablo yer almaktadır. Uygun bir grafiksel gösterim seç ve ardından şu soruları yanıtla:

a) Erkeklerin 30 metre koşuda daha iyi sonuçları var mı?
b) Uzun atlama mesafesinde, cinsiyete bağlı bir fark var mı?
c) Vücut kaldırma egzersizlerini erkekler mi yoksa kızlar mı daha iyi yapıyor?
d) Vücut duruşu kızlarda mı yoksa erkeklerde mi daha iyidir?

Öğrenci	Cinsiyet	Uzun Atlama (M)	30 M Koşu (Sn)	Vücut Kaldırma Egzersizleri	Vücut Duruşu	Öğrenci	Cinsiyet	Uzun Atlama (M)	30 M Koşu (Sn)	Vücut Kaldırma Egzersizleri	Vücut Duruşu
1	E	2,23	3,91	57	çok iyi	16	K	1,52	6,23	43	iyi
2	E	2,28	3,73	63	iyi	17	E	2,01	4,56	51	çok iyi
3	K	1,42	6,15	35	kötü	18	K	1,61	5,51	47	iyi
4	E	2,12	4,13	51	çok iyi	19	K	1,62	5,53	46	iyi
5	E	1,45	4,18	56	iyi	20	E	1,65	5,11	53	çok iyi
6	K	1,51	6,03	36	kötü	21	E	1,90	4,89	51	iyi
7	E	2,15	4,17	53	iyi	22	E	1,67	5,06	42	kötü
8	E	2,18	3,92	57	çok iyi	23	K	1,73	6,12	49	iyi
9	K	1,47	6,07	41	iyi	24	K	1,65	5,01	46	kötü
10	K	1,51	5,78	41	iyi	25	E	1,88	6,03	47	çok iyi
11	K	1,52	5,52	42	kötü	26	E	2,01	4,23	48	kötü
12	K	1,53	5,91	43	iyi	27	K	1,66	5,14	45	iyi
13	E	2,03	4,53	51	iyi	28	K	1,93	5,23	52	kötü
14	E	2,05	4,56	53	kötü	29	K	2,17	6,22	51	çok iyi
15	E	2,63	5,07	55	iyi	30	E	1,99	6,23	56	çok iyi

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Arkadaşlar Kire, Vlado, Ardian ve Boro, basketbol oynamışlar. Bir deney yapmışlar. Her biri 80'er serbest atış kullanmış. Bu atışlarda elde ettikleri isabetler Şekil 11'deki sütun diyagramında gösterilmiştir.



Şekil 11

   a) Hangi arkadaş en iyi sonucu elde etmiştir?

   b) Her bir arkadaş için isabetlerin toplam deneme sayısına oranı ne kadardır?

   c) Dördü için isabet yüzdesi tablosu hazırlayınız ve tabloda yer alan verileri yüzde cinsinden hem sütun diyagramı hem de daire (sektör) diyagramı ile gösteriniz.

2. Otuz farklı aileden akraba veya arkadaşlarının bir listesini yapınız, ancak listeye her aileden yalnızca bir kişi yazınız.

   a) Akrabanızın veya arkadaşınızın ailesinde evcil hayvan olarak kedi, köpek ya da papağan olup olmadığını gösteren verileri toplayınız.

   b) Toplanan verileri bir tabloda düzenleyiniz.

   c) Verileri yüzde olarak yazınız ve ardından bunları sütun diyagramı ve daire (sektör) diyagramı ile gösteriniz.

   d) Ailelerin yüzde kaçında evcil hayvan bulunmaktadır?

3. Yarım litre yoğurdun fiyatı beş ay boyunca aşağıdaki gibidir:

ay	ocak	şubat	mart	nisan	mayıs
inek	45	47	44	40	40
koyun	57	60	55	51	51

Tablodaki verileri tek bir sütun diyagramında gösteriniz.

4. Bir gün içinde geçen zamanı şu etkinliklerde daire (sektör) diyagramı ile gösteriniz: uyku, okul, evde ders çalışma, oyun, diğer.

5. Şekil 12'de bir mağazanın bir ay içindeki satışlarında 8 tür ayakkabının yüzdesel dağılımı gösterilmiştir. Eğer ay boyunca satılan ayakkabıların toplam sayısı 1000 ise, her türden satılan ayakkabı sayısını bulunuz.



Şekil 12

6. Aşağıdaki tabloda belirli yıllarda Bitola'daki yağış miktarı metrekare başına litre (l/m^2) cinsinden verilmiştir.

yıl	1990	1995	2000	2005	2010	2011	2012	2013
yağış (l/m^2)	516	653	403	647	788	381	742	621
yıl	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
yağış (l/m^2)	850	671	685	538	679	576	649	690

Tablodaki verileri bir çizgi diyagramı ile gösteriniz.

6.5. Verilerin işlenmesi ve yorumlanması

SORU 1

Mia ve Amir beş soruluk bir matematik testi yapmış, her doğru çözülen soru 10 puan değerindedir ve aşağıdaki sonuçları almışlardır:

	1	2	3	4	5
Mia	10	8	9	8	7
Amir	6	7	10	9	10

Hangisini daha başarılı belirlemek için hangi başarı ölçütünü seçersin?



Aritmetik ortalama iki veya daha fazla sayının toplamının, terim sayısına bölünmesiyle elde edilen sayıdır.

Aritmetik ortalama bazen **ortalama değer** ya da kısaca **ortalama** olarak da adlandırılır.

ÖRNEK 1

Selma, lise birinci sınıfın ilk döneminin sonunda aşağıdaki ders notlarına sahiptir:

Makedonca dili ve edebiyatı	5
Matematik	4
Birinci yabancı dil	4
İkinci yabancı dil	3
Biyoloji	4
Kimya	5
Fizik	4
Tarih	5
Coğrafya	5
Bilişim	4
Müzik eğitimi	3
Görsel sanatlar	4
Beden eğitimi ve sağlık	5

Buna göre Selma'nın dönem sonu ortalaması:

$$\frac{5+4+4+3+4+5+4+5+5+4+3+4+5}{13} = \frac{55}{13} = 4{,}23.$$

Not: Aritmetik ortalama, sayıların en küçüğü ile en büyüğü arasında yer alır.

ÖRNEK 2

Muhtemelen fark etmişsindir ki 1. soruda Mia ve Amir toplamda aynı sayıda puan elde etmişlerdir. Bu, daha iyi başarısı olan öğrencinin belirlenmesinin sürdürülmesi gerektiği anlamına gelir. Mia ve Amir'in soru başına ortalama puanı aynıdır, çünkü $\frac{10+8+9+8+7}{5} = \frac{42}{5} = 8{,}4$ ve $\frac{6+7+10+9+10}{5} = 8{,}4$. Buna göre, iki öğrenciden hangisinin daha iyi başarıya sahip olduğunu saptamak için sorulara göre elde edilen puanları karşılaştırmamız gerekir. Bu amaçla ek işlemler ve kavramlara ihtiyacımız vardır.



Büyüklüklerine göre küçükten büyüğe sıralanmış (en küçükten en büyüğe) sayılardan ya da ölçüm değerlerinden oluşan veri kümeleri, **veri dizisi** olarak da adlandırılır.



Eğer bir veri dizisinde en çok, yani en fazla sayıda kez görülen bir sayı varsa, o sayıya dizinin **modu (m)** denir.



Sıralı bir veri dizisindeki terim sayısı tek ise, dizinin ortasında bulunan sayıya dizinin medyanı (me) denir. Terim sayısı çift ise, ortada bulunan iki sayının aritmetik ortalamasına dizinin **medyanı** denir.



Verilen bir veri dizisinde, en büyük değer ile en küçük değerin farkına **ranj (r)** ya da **açıklık** denir.

ÖRNEK 3

Mia'nın veri dizisi: 7, 8, 8, 9, 10; buradan dizinin modu $m_1=8$ m, medyanı $m_{e1} = 8$ ve ranjı $r_1 = 10 - 7 = 3$ olur. Amir'in veri dizisi: 6, 7, 9, 10, 10; buradan dizinin modu $m_2 = 10$, medyanı $m_{e2} = 9$ ve ranjı $r_2=10-6=4$ elde edilir.
Demek ki şimdiye kadar şunları öğrendik:

	Mia	Amir
Ortalama	8,4	8,4
Mod	8	10
Medyan	8	9
Ranj	3	4

Geriye başarı ölçütlerini belirlemek kalıyor:

a) Mod ve medyan değerlerini incelersek, bunların ortalamaya yakın olduğunu, yani veri dizisinin ortalamadan daha az sapma gösterdiğini görürüz. Bu nitelikte olan ilk dizi, yani daha tutarlı olan Mia'nın dizisidir.

b) Yalnızca en iyi sonuçlar göz önüne alınırsa, ikinci veri dizisi daha iyidir.

SORU 2

Yirmi günlük bir dönemde elektrikli cihazların onarımı için servis, günlük olarak aşağıdaki çağrı sayılarını almıştır:

6 6 3 2 7 4 2 4 7 6
3 4 2 6 2 6 5 3 7 5

Aritmetik ortalamayı, modu, medyanı ve veri dizisinin aralığını belirleyin.

ÖRNEK 4

Bir okulda öğrencilerin boyları aşağıdaki tablo ile gösterilmiştir:

Boy (cm)	116'dan kısa	116-120	121-125	126-130	131-135	136-140	141-145	145'ten uzun
Öğrenci sayısı	2	38	65	124	131	127	150	74

Eğer veriler gruplanmış bir frekans tablosu ile gösterilmişse, tek tek değerler bilinmediğinden dolayı mod bulunamaz. Burada istenen, verilerin **mod sınıfıdır**; yani en yüksek frekansa sahip olan sınıf. En yüksek frekansa sahip grup 141–145'tir; dolayısıyla bu, verilerin mod sınıfıdır. Medyan, 131–135 sınıfında yer alır, çünkü verilerin dizisinde 356. öğe bu sınıfa düşmektedir.

SORU 3

Aşağıdaki veri dizisi verilmiştir: 11, 3, 5, 7, 9, 11, 6, 8, 8, 7, 5, 10.

a) Dizinin modu 8 olacak şekilde bir sayı ekleyin.

b) Dizinin medyanı 7 olacak şekilde bir sayı ekleyin.

c) Dizinin aritmetik ortalaması 9 olacak şekilde bir sayı ekleyin.

Tablolu Hesaplamalar için Yazılım Programlarının Kullanımı

ÖRNEK 5

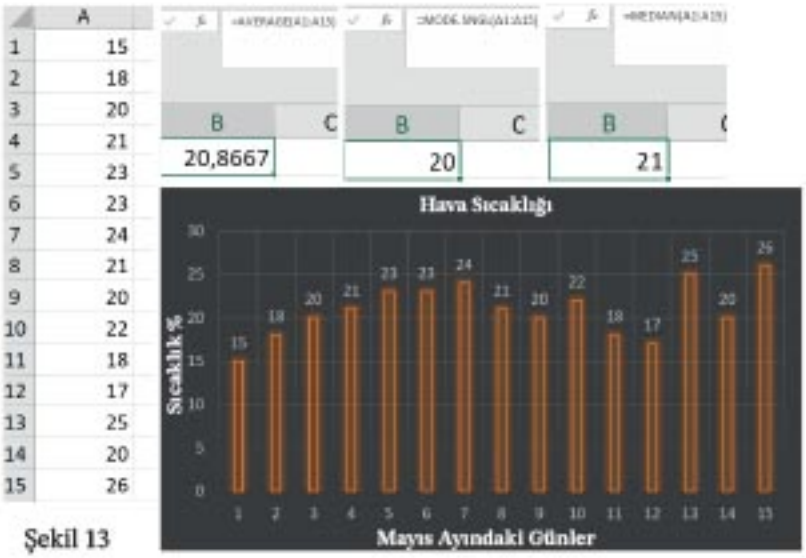
Yovan, hava sıcaklığını Celsius derecesi ile her gün saat 14.00'te on beş gün boyunca ölçmüş ve şu verileri elde etmiştir:

15	18	20	21	23
23	24	21	20	22
18	17	25	20	26

Bu veriler, tablolama hesaplamaları yapabilen bir eğitim yazılımına girilebilir. Ardından aşağıdaki düğme/fonksiyonlar seçilebilir:

- AVERAGE: aritmetik ortalamayı hesaplamak için,
- MOD: mod değerini belirlemek için,
- MEDIAN: medyanı belirlemek için.

Son olarak Chart düğmesi yardımıyla verilerin grafiksel gösterimi elde edilir (çizim 13). Bu sırada hangi grafik türünü kullanacağını seçebilirsin.



Şekil 13

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Verilerin aritmetik ortalamasını ve aralığını bulun:

   a) 22, 4, 5, 9 ve 17; b) 7, 17 ve 54; c) 4, 2 ve $6\frac{1}{3}$ d) 2,18; 5,38; 10,2 ve 18,6.

2. Beş öğrenci uzun atlama disiplininde yarışmış ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:
   Mile 1,6 m atlamış, Agim 2,05 m, Zoran 1,85 m, Pavle 1,55 m ve Stoyan 1,9 m.
   Atlama uzunluklarının ortalama değerini bulun.

   a) Yarışmacıların ortalama atlama uzunluğu ne kadardır?

   b) Atlama uzunluklarının aralığı ne kadardır?

3. Fitim 3 saat boyunca araç kullanmıştır. İlk iki saat 80 km/s hızla, üçüncü saat ise 50 km/s hızla gitmiştir. Ne kadar yol katetmiştir ve ortalama hızı kaç km/s olmuştur?

4. Bir sınıfta 30 öğrenci vardır. Öğretim yılı sonunda sekizi matematikten 5, onu 4, dokuzu 3, geri kalanları ise 2 notu almıştır.

   a) O bölümdeki öğrencilerin matematikten ortalama başarısını belirleyin.

   b) Notları sütun grafiği ile temsil edin.

5. "Kara inek–beyaz süt" süt sığırcılığı çiftliğinde 6 ay boyunca süt üretimi aşağıdaki gibi olmuştur:

Ay	Süt (litre)
Ocak	456
Şubat	432
Mart	556
Nisan	621
Mayıs	345
Haziran	432

   Bu veriler için aylık ortalama süt üretimini, medyanı ve modu bulun.

6. Biyologlar 190 yaprağın uzunluğunu ölçmüşlerdir:

Uzunluk (cm)	0-1,9	2-3,9	4-5,9
Yaprak sayısı	3	33	62
Uzunluk (cm)	6-7,9	8-9,9	10-11,9
Yaprak sayısı	49	36	7

Bu verilerin mod sınıfını bulunuz. Sonuçları sütun grafiği ile gösterin.

ARAŞTIRMA

Hipotez, sınırlı sayıda kanıta dayalı olan ve çoğunlukla daha ileri araştırmaların başlangıcını oluşturan bir varsayımdır. Onun, doğrulanabilmesi veya reddedilebilmesi için deneyler ya da gözlemler aracılığıyla sınanması gerekir.

Okulunuzdaki sınıf arkadaşlarınız arasında şu hipotezin doğruluğunu sınamak için bir araştırma yapınız: "Yapay zekâ kullanımı (YZ), kişiselleştirilmiş iletiler ve uyarlanabilir araçlar aracılığıyla öğrenmeyi geliştirir." Bir örneklem seçiniz, bir anket hazırlayınız, elde edilen verileri işleyiniz, sununuz ve sonuçları yorumlayınız.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME İÇİN ALIŞTIRMALAR

1. Aynı anda iki zar (bir kırmızı ve bir mavi) atılmaktadır (Resim 1). Aşağıdaki olayların olasılığını belirleyiniz:
   a) Her iki zarın toplamı 7'dir,
   b) Her iki zarın toplamı 8'dir,
   c) Her iki zarın toplamı 12'den büyük değildir,
   ç) Her iki zarın toplamı 7 veya daha büyüktür.



Resim 1

2. Talih çarkında 8 bölme vardır ve dönmeden sonra gösterge 1'den 8'e kadar olan sayılardan birinin üzerinde durur (şekil 1).
Bir dönüşten sonra gösterge aşağıdakilerin üzerinde durma olasılığı nedir:
a) sayı 1, b) tek sayı,
c) 3'ten büyük sayı, d) 9'dan küçük sayı.



Şekil 1

3. Bir zar bir kez atılır. Olasılığı belirleyin:
a) 2 ile 5 arasında bir sayı gelmesi, b) asal sayı gelmesi.

4. 52 kartlık bir desteden bir kart çekilmiştir. Çekilen kartın aşağıdakilerden biri olma olasılığı nedir?
a) kırmızı papaz, b) resimli kart, c) kupa vale, d) sinek

5. Hatalı 20 kalem, yanlışlıkla 130 sağlam kalemin olduğu bir kutuya konmuştur. Kalemler karıştırılmış ve kutudan bir kalem alınmıştır. Çekilen kalemin:
a) sağlam b) arızalı olma olasılığı nedir?

6. 1'den 90'a kadar olan sayılar 90 farklı kartın üzerine yazılmış ve saydam olmayan bir kaba konmuştur. Kabın içinden bir kart çekilir. Üzerinde aşağıdakilerden birinin yazılı olma olasılığını belirleyin:
a) tam kare, b) 5'e bölünebilen sayı, c) iki basamaklı sayı.

7. 100 kişinin kütleleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

kütle (kg)	20-39	40-45	46-50	51-55
frekans	6	8	22	31
kütle (kg)	56-60	61-70	71-80	80'den fazla
frekans	12	11	5	5

Bu kütlelerin mod sınıfını bulunuz. Verileri sütun grafiği ile temsil edin.

8. Bir sınıftaki öğrencilerin matematik yazılısından aldıkları puanlar aşağıdaki gruplanmış frekans tablosu ile gösterilmiştir:

puan	0-25	26-49	50-71	72-87	86-100
öğrenci sayısı	3	8	13	10	8

Mod sınıfını belirleyin.

9. Ace sık sık ilk derse geç kalır. Mayıs ayı boyunca geç kaldığı dakika sayısını aşağıdaki frekans tablosuna kaydetmiştir:

dakika sayısı	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
gün sayısı	1	3	2	4	6	3	4	4	3	1

Veri dizisinin modunu ve medyanını belirleyin.

10. Bir odada ortalama yaşı 20 olan 16 kişi, başka bir odada ortalama yaşı 40 olan 24 kişi vardır. Bu 40 kişinin ortalama yaşı nedir?

11. On gün boyunca bir dükkânda çikolata satışları kaydedilmiştir. İlk gün 23 çikolata satılmış, sonraki 5 gün boyunca satış her gün 2 çikolata artmış, son 4 gün ise altıncı günle aynı kalmıştır.

a) Verileri bir tablo hâlinde gösterin.

b) Satışların çizgisini (çizgisel gösterimini) yapın.

12. Bir cep telefonu mağazasında yılın ilk altı ayı boyunca satılan telefon sayıları aşağıdaki gibidir:

Ay	Satılan telefon sayısı
Ocak	30
Şubat	55
Mart	45
Nisan	70
Mayıs	50
Haziran	25

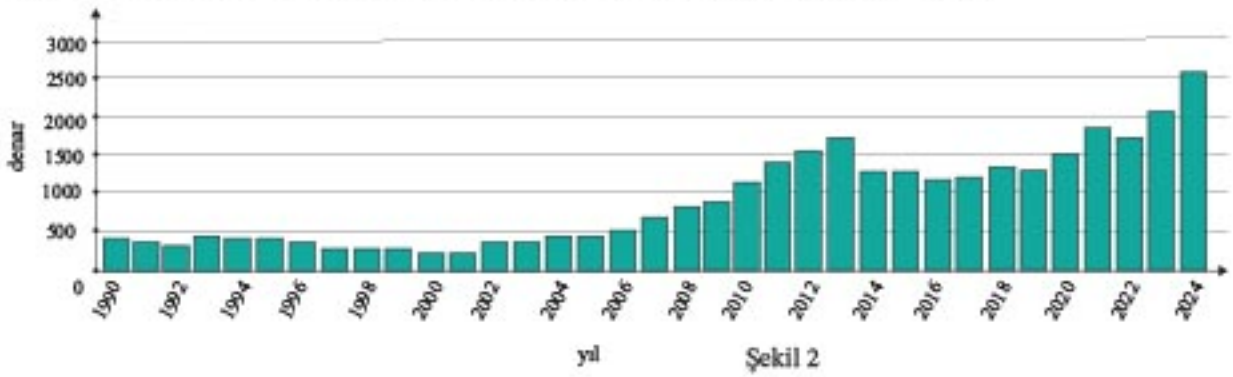
Satılan telefon sayılarını bir piktogram ile temsil edin.

13. Dört şehrin nüfusu aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Şehir	Nüfus
Bitola	80 000
Kumanovo	75 000
Prilep	65 000
Tetovo	50 000

Bu veriler için bir piktogram yapın.

14. Bir ürünün fiyatı 1990'dan 2024'e kadar şekil 2'de gösterildiği gibi değişmiştir.



Şekil 2

a) Fiyatın en düşük olduğu yıl ve en yüksek olduğu yılı belirtin.

b) Fiyatın 1500 ile 2000 dinar arasında olduğu yılları belirleyin.

c) Ortalama fiyatın yaklaşık 2000 dinar olduğu art arda üç yılı belirtin.

15. Bir sınıftaki 10 öğrencinin boyları sistematik muayenede ölçülmüş ve santimetre cinsinden aşağıdaki değerler elde edilmiştir:

172,0	175,5	184,0	167,4	169,2
175,5	183,2	175,5	182,3	168,3

Eğitim yazılımı yardımıyla aritmetik ortalamayı, modu ve medyanı belirleyiniz; ardından uygun bir grafiksel gösterim seçin.

16. Amatör tiyatro gösterileri festivali her yıl aynı zamanda düzenlenmektedir. Değerlendirme komisyonu 5 üyeden oluşmakta ve her biri 6 ile 10 arasında puan vermektedir. Festivalde 7 farklı amatör tiyatro oyunu sergilenmiş ve aşağıdaki puanlar alınmıştır:

Oyun no	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Birinci üye	7	8	9	10	9	8	10
İkinci üye	8	9	7	6	7	8	10
Üçüncü üye	9	8	6	7	7	10	6
Dördüncü üye	7	8	7	8	10	6	7
Beşinci üye	8	9	10	9	6	6	10

Eğitim yazılımı yardımıyla her bir oyun için aritmetik ortalamayı, modu ve medyanı belirleyiniz; ardından verilerin uygun bir grafiksel gösterimini seçiniz. Sonra festivalin kazanan oyununu tespit edin.

17. 173, 158, 196, 151, 205, 214 ve x sayılarının aritmetik ortalaması 163'e eşittir. x değerini bulun.

18. Bir fabrikaya olan mesafe (km) 40 çalışanın her biri için aşağıdaki tabloda verilmiştir:

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
6	12	7	12	14	2	9	6	15	15

Uzunluğu 5 olan sınıflar ile gruplanmış frekans tablosu oluşturun.

a) Çalışanların en çok hangi mesafede oturduğunu belirleyin.

b) Fabrikaya 15 km'den daha kısa mesafede oturanların yüzdelik oranını hesaplayın.

c) Fabrikanın, 16 km'den daha uzak mesafede oturan tüm çalışanlar için ulaşımı, maaşın %10'u kadar ödeyerek sağlamasının kârlı olup olmadığını belirleyin.

19. Üç madeni para aynı anda 30 kez atılmıştır. "Yazı"ların sayısı aşağıdaki gibidir:

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

Bir frekans tablosu düzenleyiniz ve verileri sütun grafiği ile temsil edin.

20. Bir kavanozda bazıları yeşil, diğerleri mavi olmak üzere 24 bilye vardır. Kabın içinden bir bilye çekilmiştir. Onun yeşil olma olasılığı $\frac{2}{3}$'tür. Kabın içindeki mavi bilyelerin sayısını belirleyin.

21. Bir kutuda 12 top bulunmaktadır; bunlardan tam olarak x tanesi siyahtır.

a) Çekilen bir topun siyah olma olasılığı nedir?

b) Kaba 6 siyah top daha eklenirse, siyah top çekilme olasılığı öncekinin iki katı olur. x'in değerini belirleyin.

22. Bir kapta 5 kırmızı ve birkaç mavi top vardır. Mavi top çekilme olasılığının, kırmızı top çekilme olasılığının iki katı olduğu bilinmektedir. Kapta kaç mavi top olduğunu belirleyin.

23. Uzunluğu 3 m, genişliği 2 m olan dikdörtgen biçimli bir halı bulunan bir zemine zar atıyorsunuz. Halının üzerinde çapı 1 m olan bir daire çizilidir. Zarın halının şu kısmına düşme olasılığı nedir:

a) dairenin dışı,

b) dairenin içi?

KULLANILAN KAYNAKLAR

1. В.М. Клопский, З.Д. Скопец, М.И. Ягодовский – Geometri. 9. ve 10. sınıflar için ders kitabı – Prosveşçeniye (1977)
2. Polygons – Ismail Ersozoglu, Zambak
3. Mathematics, IX. sınıf için ders kitabı, NCERT
4. VEGA 1, lise 1. sınıfta matematik için e-ders kitabı; Yazarlar: Andreja Mohorčič, Simona Pustavrh, Mateja Škrlec, Helena Kapus, Vesna Zmazek, Oskar Jericijo, Irena Rauter Repija